Mathématiques pour l'Ingénieur
Examen final du 12 janvier 2017
Seul document autorisé : formulaire sur la transformée de Laplace

Exercice 1. Calculer l'intégrale suivante en utilisant la formule des résidus

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta} d\theta.$$

Exercice 2. On va calculer l'intégrale impropre

$$(*) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt.$$

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. On introduit la fonction analytique $z \mapsto f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ et le contour $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ composé du segment $\gamma_1 = [-R, R]$ et du demi-cercle γ_2 centré en 0 et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique positif. Calculer par la formule des résidus

$$\int_\gamma f(z)dz.$$

3. Déterminer $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_1} f(z)dz$.
4. Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$.
5. En déduire la valeur de l'intégrale impropre (*).

Exercice 3. On considère un système linéaire, stationnaire et causal dont la fonction de transfert est donnée par

$$H(s) = \frac{3s+4}{s^2-2as+a^2+1},$$

où a est un paramètre réel.

1. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce système.
2. Pour quelles valeurs de a ce système est-il stable ?

Exercice 4. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}, \qquad t \geq 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$