Mathématiques pour l'Ingénieur
Examen partiel du 19 octobre 2016

Exercice 1. Déterminer toutes les fonctions $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = \cos^2(x)$$

.

On rappelle l'identité : $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

Exercice 2. Une fonction périodique $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a comme développement en série de Fourier une série dont les coefficients sont donnés par

$$a_n = \frac{n\pi}{n^4 + \pi^4} \qquad b_n = \frac{\pi}{n^2 + n\pi + \pi^2}.$$

Que peut-on dire sur la continuité de f et de sa dérivée f' ?

Exercice 3. On considère la fonction périodique $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ défini dans une période par $F(t) = |t|$ pour $-\pi \leq t \leq \pi$. Déterminer une fonction $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui est solution de l'équation différentielle

$$y'' + 4y = F(t),$$

et qui vérifie les deux conditions $y(0) = y'(0) = 0$.

Indication : On développera d'abord F en série de Fourier et on cherchera une solution particulière sous forme de série de Fourier.

Exercice 4. Calculer la transformée de Fourier des deux fonctions suivantes :

1. $f(t) = 1$ pour $a < t < b$ et 0 sinon. Que devient le résultat lorsque $b = -a$.
2. $f(t) = e^{-kt}$ pour $t > 0$ et 0 sinon (k constante stritement positive).

Exercice 5. Soit f une fonction et soit $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. On introduit la fonction

$$g(t) = e^{2it} f(\frac{t-\pi}{3}).$$

Exprimer la transformée de Fourier $\hat{g}$ de g en fonction de $\hat{f}$.