Université de Nice
Année 2012-2013

Feuille de TD1

Exercice 1 - *Nature des points critiques.*

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x + 4y - x^2 - y^4$.

1. En quels points la fonction f peut-elle avoir un extrémum local ?
2. La fonction f a-t-elle un extémum local au point $(1, 1)$?

Exercice 2 - *Nature des points critiques.*

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + 2x - y^4 + 1$.

1. En quels points la fonction f peut-elle avoir un extrémum local ?
2. Montrer que la fonction f a un point selle au point $(-1, 0)$.

Exercice 3 - *Maximum d'une fonction affine par morceaux.*

On considère les trois fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$g_1(x) = 6x + 1, \qquad g_2(x) = -x + 3, \qquad g_3(x) = -7x + 7.$$

On définit la fonction f affine par morceaux par $f(x) = \min\{g_1(x), g_2(x), g_3(x)\}$. Trouver le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 4 - *Maximum d'une fonction affine par morceaux.*

On considère les deux fonctions affines de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

$$g_1(x, y) = 2x + 3y + 1, \qquad g_2(x, y) = -2x - y + 2.$$

On définit la fonction f affine par morceaux par $f(x) = \min\{g_1(x, y), g_2(x, y)\}$. Trouver le maximum de la fonction f quand (x, y) parcourt l'ensemble défini par les inégalités

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad x + y \leq 1.$$

Exercice 5 - *Valeur d'un jeu.*

On considère le jeu à deux joueurs et à somme nulle représenté par la matrice de paiement suivant :

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	-1	1	1	-1
x_2	-2	-3	2	2
x_3	-2	1	-2	1
x_4	-1	-3	4	1

Déterminer, si elle existe, la valeur de ce jeu en stratégie pure.

Exercice 6 - *Stratégie de guerre.*

Deux armées commandées par deux généraux X et Y s'affrontent. Le général X a trois régiments basés dans son camp C_X et le général Y a deux régiments basés dans son camp C_Y. Chaque général peut sortir en secret un nombre entier (éventuellement nul) de régiments de son camp, les envoyer à attaquer le camp ennemi et garder les autres régiments dans son camp pour le défendre. Il s'en suivra ainsi deux combats, l'un pour le camp C_X et l'autre pour le camp C_Y, dont les issues sont dictées par les règles suivantes :

Si n régiments attaquent un camp défendu par m régiments, alors :

– si $n > m$, l'attaquant capture les m régiments et gagne le camp.
– si $n = m$, chaque général garde ses régiments et le camp est défendu.
– si $n < m$, le défenseur capture les n régiments attaquants.

On suppose que tous les régiments ont la même valeur, que le camp C_X est équivalent à a régiments et que le camp C_Y est équivalent à b régiments.

1. Ecrire la matrice de paiement de ce jeu en fonction des paramètres a et b.
2. Déterminer les valeurs de *maxmin* et *minmax* en fonction des paramètres a et b.
3. Dans le cas $a = b$, montrer que ce jeu n'admet pas de valeur en stratégie pure.