Examen du 6 janvier 2022

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (4 points)
Soit $\mathcal{S}_5$ le groupe symétrique à 5 objets notés $1, 2, 3, 4, 5$ et soient f, g et h les homomorphismes de groupes

$$f : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}_5, \qquad g : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}_5, \qquad h : \mathbb{Z} \to \mathcal{S}_5$$

déterminés par les propriétés $f(1) = \sigma$, $g(1) = \tau$ et $h(1) = \sigma \circ \tau$ avec $\sigma = (54321)$ et $\tau = (234)$.

1. Déterminer les permutations $f(33)$ et $g(-10)$ en les écrivant comme produit de cycles à supports disjoints.
2. Calculer l'ordre de la permutation $\sigma \circ \tau$ dans $\mathcal{S}_5$.
3. Déterminer les sous-groupes $\ker(f)$, $\ker(g)$ et $\ker(h)$ de $\mathbb{Z}$.
4. A-t-on $h(n) = f(n) \circ g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 2 - (3 points)
Soit $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application qui à un entier n associe la sommes des chiffres de n. Par exemple, $s(7) = 7, s(12) = 3$ et $s(267) = 15$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la congruence

$$n \equiv s(n) \mod 9.$$

Exercice 3 - (4 points)
Soient $x \in \mathbb{R}$ et Δ_n le déterminant d'ordre n suivant

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \ddots & x & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

1. On pose $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = 1 + x^2$. Donner Δ_2 et Δ_3 sous forme de fonction polynomiale en x.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a la relation
$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = x^2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}).$$
3. Donner Δ_n sous forme de fonction polynomiale en x.

Exercice 4 - (4 points) On considère le groupe $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec la loi de composition standard

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

pour tout $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$. On introduit les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{Z}^2$

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 x_2 = 0\},$$
$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\}.$$

1. Montrer que A n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$.
2. Donner un sous-groupe non-trivial (c'est-à-dire non-réduit à l'élément neutre) F de $\mathbb{Z}^2$, vérifiant $F \subset A$.
3. Montrer que B est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$.
4. Est-ce que B est un groupe cyclique ? Si oui, donner un générateur.

Exercice 5 - (5 points) On considère la forme quadratique

$$q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \qquad q(x, y, z, t) = xy + yz - zt + tx.$$

1. Donner la matrice associée à q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Ecrire la forme quadratique q comme somme de carrés de formes linéaires en utilisant la réduction de Gauss.
3. En déduire le rang et la signature de q.
4. Donner un vecteur non-nul $v \in \mathbb{R}^4$ isotrope, c'est-à-dire $q(v) = 0$, et vérifiant

$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} = 2.$$