

Examen du 9 novembre 2021

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (4 points) On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels. On munit \mathbb{R} de la loi de composition

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

1. Est-ce que cette loi est commutative ? associative ? A-t-elle un élément neutre ?
2. Déterminer les éléments de \mathbb{R} qui sont inversibles pour la loi \star .

Exercice 2 - (4 points) Trouver tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant les deux congruences

$$5x \equiv 2 \pmod{9} \text{ et } 2x \equiv 1 \pmod{13}.$$

Exercice 3 - (4 points)

1. Déterminer tous les homomorphismes de groupes

$$f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, +).$$

2. Combien y en a-t-il ?
3. Parmi ces homomorphismes existe-t-il un homomorphisme injectif ? Si oui, combien ?
4. Parmi ces homomorphismes existe-t-il un homomorphisme surjectif ? Si oui, combien ?

Exercice 4 - (4 points) Calculer le reste de la division euclidienne de $20^{21} + 21^{20}$ par 19.

Exercice 5 - (4 points)

1. Déterminer tous les entiers x, y vérifiant la relation $8x + 29y = 1$.
2. En déduire l'inverse de $\bar{8}$ dans $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^*$.
3. Déterminer le plus petit entier $z \in \mathbb{N}$ vérifiant $8z \equiv 3 \pmod{29}$.