

Examen du 24 juin 2021

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (3 points) Trouver tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant les deux congruences

$$3x \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } 2x \equiv 5 \pmod{7}.$$

Exercice 2 - (7 points) On considère l'anneau

$$A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

On rappelle qu'un élément de A est un couple (a, b) avec $a \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et que l'addition et la multiplication dans A correspondent à l'addition et à la multiplication dans chaque facteur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n = 3, 6$.

1. Est-ce que A est un anneau unitaire? Si oui, quel est l'unité?
2. Donner tous les éléments inversibles de A . Quel est l'ordre du groupe A^* ?
3. Donner tous les éléments d'ordre 2 du groupe additif $(A, +)$.
4. L'anneau A est isomorphe à un des anneaux suivants

$$\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Lequel? Justifier la réponse. Donner l'image de $(\bar{1}, \bar{2}) \in A$ par cet isomorphisme.

Exercice 3 - (3 points) Montrer que le nombre

$$20^{21^{22}} + 22^{23^{24}}$$

est divisible par 7.

Exercice 4 - (3 points) On considère la permutation $\sigma = (123)(4567)(34)$ dans \mathcal{S}_7 .

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Déterminer la permutation σ^8 .

Exercice 5 - (4 points) On considère la forme quadratique

$$q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad q(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$$

1. Donner la matrice associée à la forme quadratique q .
2. Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires en utilisant la méthode de Gauss.
3. Déterminer le rang et la signature de q .