Examen du 8 janvier 2021

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (5 points)
Soit f un homomorphisme de groupe $f : \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2020\mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'homomorphisme f est complètement déterminé par l'image $f(\overline{1})$ en exprimant $f(\overline{n})$ en fonction de $f(\overline{1})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2. Quels sont les éléments $y \in \mathbb{Z}/2020\mathbb{Z}$ qui peuvent s'écrire $f(\overline{1})$ pour un homomorphisme f ? *Indication : que peut-on dire sur l'ordre de $f(\overline{1})$?*
3. Combien y a-t-il d'homomorphismes de groupes $f : \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2020\mathbb{Z}$?
4. Parmi ces homomorphismes de groupes y en a-t-il un qui est injectif ?
5. Parmi ces homomorphismes de groupes y en a-t-il un qui est surjectif ?

Exercice 2 - (4 points)
On considère l'anneau de Gauss

$$A = \{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

On rappelle que A est un sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$. Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$ on note $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ le module du nombre complexe z.

1. Donner tous les éléments $z \in A$ vérifiant $|z| = 1$.
2. Déterminer la plus petite valeur de $|z|$ quand $z \in A$ et $z \neq 0$.
3. Montrer que si z est inversible, alors $|z| = 1$.
4. Donner l'ensemble des éléments inversibles de A.
5. Déterminer l'ensemble des $z \in A$ vérifiant $|z| = \sqrt{1003}$. *Indication : réduire modulo* 4

Exercice 3 - (3 points)
On considère la permutation $\sigma = (12)(345)(25)$ dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_5$. Donner la puissance σ^{2021} sous forme de produit de cycles à support disjoint.

Exercice 4 - (4 points)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et Δ_n le déterminant d'ordre n suivant

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. On pose $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = a$. Calculer Δ_2 et Δ_3.
2. Montrer qu'il existe deux constantes α et β tel que

$$\Delta_{n+2} = \alpha\Delta_{n+1} + \beta\Delta_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   Donner α et β en fonction de a, b, c.

Exercice 5 - (4 points)
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré ≤ 2 et la forme quadratique $q : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(P) = P(0)P'(1), \qquad \forall P \in \mathbb{R}_2[X].$$

On rappelle que P' désigne la dérivée de P.

1. Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à q.
2. Pour un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ calculer $q(P)$ en fonction de a, b, c.
3. Ecrire $q(P)$ comme somme de carrés de formes linéaires en utilisant la réduction de Gauss.
4. En déduire le rang et la signature de q.