Compléments d'algèbre — Université de Nice
Année 2020-2021

Examen du 18 novembre 2020

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (3 points) On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nul. On munit $\mathbb{R}_+$ de la loi de composition

$$\forall x, y \in \qquad x \star y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Est-ce que cette loi est commutative ? associative ? A-t-elle un élément neutre ?
2. Déterminer les éléments de $\mathbb{R}_+$ qui sont inversibles pour la loi $\star$.

Exercice 2 - (3 points) Trouver tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant les deux congruences

$$5x \equiv 2 \text{ mod } 6 \text{ et } 3x \equiv 1 \text{ mod } 5.$$

Exercice 3 - (8 points) On considère l'anneau

$$A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

On rappelle qu'un élément de A est un triplet (a, b, c) avec $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et que l'addition et la multiplication dans A correpondent à l'addition et à la multiplication dans chaque facteur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n = 2, 3, 4$.

1. Est-ce que A est un anneau unitaire ? Si oui, quel est l'unité ?
2. Donner tous les éléments inversibles de A. Quel est l'ordre du groupe A^* ?
3. Donner tous les éléments d'ordre 2 du groupe additif $(A, +)$.
4. L'anneau A est isomorphe à un des anneaux suivants

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

   Lequel ? Justifier la réponse. Donner l'image de $(\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}) \in A$ par cet isomorphisme.

Exercice 4 - (3 points) Montrer que le nombre

$$18^{11^{18^{11}}} + 11^{18^{11^{18}}}$$

est divisible par 19.

Exercice 5 - (3 points)

1. Déterminer tous les entiers x, y vérifiant la relation $7x + 27y = 1$.
2. En déduire l'inverse de $\overline{7}$ dans $(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^*$.
3. Déterminer le plus petit entier $z \in \mathbb{N}$ vérifiant $7z \equiv 9 \mod 27$.