QCM
1 point par bonne réponse
Pas de points négatifs si mauvaise réponse
Les 20 questions sont indépendantes

1. Le nombre de générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}, +)$ est égal à
   (a) 1
   (b) 6
   (c) 16
   (d) 59
   (e) 60

2. Le nombre d'éléments d'ordre 2 du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est égal à
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 4
   (e) ∞

3. L'ordre de la classe $\overline{2}$ dans le groupe $((\mathbb{Z}/19\mathbb{Z})^*, \cdot)$ est égal à
   (a) 2
   (b) 3
   (c) 6
   (d) 18
   (e) 19

4. On considère l'homomorphisme de groupe $f : \mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ défini par $f(\overline{x}) = \overline{5} \cdot \overline{x}$. Alors l'ordre de l'image $\mathrm{im}(f)$ est égal à
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 5
   (d) 7
   (e) 35

---

5. Parmi les 5 sous-ensembles suivants de $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*, \cdot)$ lequel n'est pas un sous-groupe ?
   (a) $\{\overline{1}\}$
   (b) $\{\overline{1}, \overline{11}\}$
   (c) $\{\overline{1}, \overline{5}\}$
   (d) $\{\overline{1}, \overline{7}\}$
   (e) $\{\overline{17}, \overline{19}\}$

---

6. Le théorème des restes chinois affirme qu'on a un isomorphisme d'anneaux
$$\Phi : (\mathbb{Z}/1001\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}).$$
   L'image $\Phi(2020)$ est égale à
   (a) $(\overline{2}, \overline{0}, \overline{20})$
   (b) $(\overline{4}, \overline{2}, \overline{11})$
   (c) $(\overline{4}, \overline{7}, \overline{5})$
   (d) $(\overline{5}, \overline{8}, \overline{6})$
   (e) $(\overline{4}, \overline{8}, \overline{6})$

---

7. Le nombre $2^{1001} + 1$ est
   (a) premier
   (b) divisible par 5
   (c) divisible par 7
   (d) divisible par $2^{13} + 1$
   (e) divisible par $2^{1000} + 1$

---

8. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes en une variable X à coefficients réels. On considère le sous-ensemble, noté $\mathbb{R}[X^2]$, des polynômes $P(X)$ qui s'écrivent $P(X) = Q(X^2)$ pour un certain polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$. Alors
   (a) $\mathbb{R}[X^2]$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$
   (b) $\mathbb{R}[X^2]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2
   (c) $\mathbb{R}[X^2]$ est un corps
   (d) $(1+X)^2 \in \mathbb{R}[X^2]$
   (e) $\mathbb{R}[X^2]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$

---

9. Le rang de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4)^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2$$

   est égal à
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3
   (e) 4

---

10. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x^2 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$$

   (a) est une fonction polynomiale de degré 5
   (b) est une fonction polynomiale de degré 3
   (c) est une forme quadratique
   (d) vérifie $f(1) = 1$
   (e) s'annule pour tout $x \geq 0$

---

11. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

est nul quand

(a) $a = 0$ et pour tout b, c

(b) $a = b = c = 1$

(c) $a = b$ et pour tout c

(d) $a = -b$ et pour tout c

(e) $a + b + c = -1$

---

12. La signature de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 3x_2^2 - x_4^2$$

est égale à

(a) $(2, 1)$

(b) $(0, 2)$

(c) $(1, 2)$

(d) $(2, 2)$

(e) $(1, 3)$

---

13. On considère la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_5$ donnée par

$$\sigma = (1423)(25)(143).$$

Alors σ est égal au cycle

(a) (12543)

(b) (1453)

(c) (12345)

(d) (1423)

(e) (12534)

---

14. Parmi les applications suivantes $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ laquelle n'est pas bilinéaire ? On note x_1, x_2 les coordonnées sur le premier facteur $\mathbb{R}^2$ et y_1, y_2 sur le deuxième facteur $\mathbb{R}^2$
    (a) $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_1$
    (b) $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$
    (c) $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_1 - x_2 y_2$
    (d) $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_2 + x_2 y_1$
    (e) $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 + y_1$

---

15. Le nombre de permutations d'ordre 2 de $\mathcal{S}_4$ est égal à
    (a) 2
    (b) 6
    (c) 9
    (d) 10
    (e) 12

---

16. Parmi les assertions suivantes une seule est fausse. Laquelle ?
    (a) Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ n'est pas abélien si $n \geq 3$
    (b) Le centre de $\mathcal{S}_n$ est égal à $\{Id\}$ si $n \geq 3$
    (c) Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par les cycles de longueur 3
    (d) L'ensemble des permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ d'ordre 2 est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$
    (e) Le groupe $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions

---

17. Le nombre d'entiers x compris entre 0 et 100 et qui vérifient les 2 congruences

$$x \equiv 3 \bmod 7 \quad et \quad x \equiv 4 \bmod 5$$

est égal à
    (a) 0
    (b) 1
    (c) 2
    (d) 3
    (e) 4

---

18. Soit $\varphi(n)$ la fonction d'Euler. Parmi les formules et affirmations suivantes une seule est fausse. Laquelle ?
    (a) $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$
    (b) $\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$ si p premier et $a \in \mathbb{N}^*$
    (c) $\varphi(n) = n - 1$ si et seulement n premier
    (d) $\varphi(n)$ divise n pour tout entier n
    (e) $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ si $PGCD(n, m) = 1$

---

19. Parmi les ensembles munis de 2 opérations suivants lequel est un corps ?
    (a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
    (b) $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$
    (c) $(\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}, +, \cdot)$
    (d) $(\{z \in \mathbb{C} \mid \mathbb{R}e(z) \in \mathbb{Q} \ et \ \mathbb{I}m(z) \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$
    (e) $(\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a \in \mathbb{Z} \ et \ b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$, où $i \in \mathbb{C}$ avec $i^2 = -1$

---

20. Trouver dans la liste ci-dessous un anneau isomorphe à

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})$$

    (a) $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^2$
    (b) $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})$
    (c) $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})$
    (d) $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$
    (e) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})$
