Examen du 13 janvier 2020

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (3 points) Résoudre les deux systèmes de congruences

1. $5x \equiv 2 \bmod 6$ et $3x \equiv 1 \bmod 5$.
2. $2x \equiv 1 \bmod 3$ et $x \equiv 4 \bmod 6$.

Exercice 2 - (2 points) Décrire un isomorphisme entre les 2 groupes $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot)$ en donnant la correspondance bijective complète entre leurs éléments.

Exercice 3 - (2 points) Calculer le reste de la division euclidienne par 11 du nombre

$$5^{10^{5^{10^5}}} + 10^{5^{10^{5^{10}}}}.$$

Exercice 4 - (3 points) Décomposer en produit de cycles à supports disjoints la permutation de $\mathcal{S}_6$ donnée comme produit de cycles

$$\sigma = (12)(346)(135).$$

Déterminer l'ordre de σ dans le groupe $\mathcal{S}_6$ ainsi que sa signature $\epsilon(\sigma)$.

Exercice 5 - (3 points) Déterminer toutes les permutations σ de $\mathcal{S}_4$ vérifiant $\sigma^3 = \mathrm{Id}$.

Exercice 6 - (4 points) Calculer $\det A$ en fonction de n, où $A = (a_{i,j})$ est la matrice carrée d'ordre $n \geq 1$ avec $a_{i,j} = |i - j|$. Indication : faire des opérations sur les lignes et les colonnes afin de rendre la matrice triangulaire.

Exercice 7 - (3 points) Décomposer la forme quadratique suivante en sommes de carrés.

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad q(x, y, z) = xy + 3xz - 7yz.$$

En déduire la signature et le noyau de q.