Examen du 16 janvier 2024

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (6 points) On considère sur $\mathbb{R}^3$ les deux formes quadratiques suivantes

$$q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$q_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

1. Donner le rang et la signature des formes quadratiques q_1 et q_2.
2. On introduit la forme quadratique r_t sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$r_t = q_1 + tq_2,$$

où t est un paramètre réel, $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, par exemple, $r_0 = q_1$ et $r_1 = q_1 + q_2$.
(a) Ecrire la réduction de Gauss de la forme quadratique r_t.
(b) Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbb{R}$ la forme quadratique r_t est-elle de rang maximal ?
(c) Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbb{R}$ la forme quadratique r_t est-elle définie positive ?

Exercice 2 - (6 points) Soit n un entier ≥ 2. On considère la matrice carrée $A_n = (a_{i,j})$ de taille n à coefficients dans l'anneau $\mathbb{R}[T]$ des polynômes réels en la variable T et dont le coefficient $a_{i,j}$ sur la i-ème ligne et j-ème colonne est donné par le polynôme

$$a_{i,j} = T^{i+j} + 1.$$

Par exemple, A_2 est la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} T^2 + 1 & T^3 + 1 \\ T^3 + 1 & T^4 + 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner le déterminant de A_2 sous forme d'un polynôme complètement factorisé.
2. Calculer le déterminant de A_3.
3. Calculer le déterminant de A_n pour $n \geq 4$.

Exercice 3 - (2 points) On considère la permutation $\sigma = (123)(4567)(73)$ dans $\mathcal{S}_7$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à support disjoints.
2. Déterminer la permutation σ^{2024}.

Exercice 4 - (3 points) On considère un entier positif a ayant comme dernier chiffre $1, 3, 7$ ou 9.

1. Montrer que a et 1000 sont premiers entre eux.
2. Enoncer le théorème d'Euler avec a et 1000.
3. En déduire les trois derniers chiffres de 627^{401}.

Exercice 5 - (3 points) Décrire un isomorphisme entre les 2 groupes $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot)$ en donnant la correspondance bijective complète entre leurs éléments. Combien y a-t-il de tels isomorphismes de groupes ?