Examen du 7 novembre 2023

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (4 points) Soit G l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $x \mapsto f(x) = ax+b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, muni de la composition des fonctions.

1. Est-ce que la loi de composition est commutative ?
2. Quel est l'élément neutre de G ?
3. Déterminer l'inverse de l'élément $f(x) = ax + b$.
4. Est-ce que G est un groupe ?
5. On considère $H = \{f \in G \mid f(x) = x + b,\ b \in \mathbb{R}\}$. Est-ce que H est un sous-groupe de G ?

Exercice 2 - (3 points)

1. Est-ce que $\overline{18}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?
2. Est-ce que $\overline{42}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?

Exercice 3 - (3 points) Trouver tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ vérifiant les deux congruences

$$5x \equiv 2 \bmod 6 \text{ et } 3x \equiv 1 \bmod 5.$$

Exercice 4 - (3 points) Montrer que le nombre

$$18^{11^{18^{11}}} + 11^{18^{11^{18}}}$$

est divisible par 19.

Exercice 5 - (4 points)

1. Combien y a-t-il d'homomorphismes de groupes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$? Justifier.
2. Parmi ces homomorphismes existe-t-il un homomorphisme injectif ? Si oui, combien ?
3. Parmi ces homomorphismes existe-t-il un homomorphisme surjectif ? Si oui, combien ?
4. Combien y a-t-il d'homomorphismes de groupes $g : \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$? Justifier.

Exercice 6 - (3 points) Existe-t-il un homomorphisme de groupes

$$f : \mathbb{Z}/2023\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$$

non-nul ? Si oui, donner un exemple. Si non, justifier. On donne les décompositions en produits de nombres premiers $2023 = 7 \cdot 17^2$ et $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$.