Examen du 10 janvier 2023

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (2 points) On considère l'anneau $(\mathbb{Z}/2023\mathbb{Z}, +, \cdot)$ et l'application $f : \mathbb{Z}/2023\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2023\mathbb{Z}$ définie par $f(\overline{x}) = \overline{x}^2 = \overline{x} \cdot \overline{x}$ pour tour $\overline{x} \in \mathbb{Z}/2023\mathbb{Z}$.

1. Est-ce que f est un homomorphisme de groupe ?
2. Est-ce que f est un homomorphisme d'anneau ?
3. Est-ce que f est bijectif ?

Exercice 2 - (4 points)
Soient $x \in \mathbb{R}$ et Δ_n le déterminant d'ordre n suivant

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \ddots & x & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

1. On pose $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = 1 + x^2$. Donner Δ_2 et Δ_3 sous forme de fonction polynomiale en x.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a la relation
$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = x^2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}).$$
3. Donner Δ_n sous forme de fonction polynomiale en x.

Exercice 3 - (4 points) On considère le groupe $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec la loi de composition standard

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

pour tout $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$. On introduit les deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{Z}^2$

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 \text{ divise } x_2\},$$

$$B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 5x_1 + 7x_2 = 0\}.$$

1. Montrer que A n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$.
2. Montrer que B est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$.
3. Est-ce que B est un groupe cyclique ? Si oui, donner un générateur.

Exercice 4 - (3 points) On considère le nombre

$$x = 20^{23^{20}} + 23^{20^{23}}.$$

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de x par 5.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de x par 7.
3. En déduire le reste de la division euclidienne de x par 35.

Exercice 5 - (3 points) On considère la permutation $\sigma = (123)(4567)(71)$ dans $\mathcal{S}_7$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Déterminer la permutation σ^8.

Exercice 6 - (4 points) On considère la forme quadratique

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad q(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$$

1. Donner la matrice associée à la forme quadratique q.
2. Décomposer q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en utilisant la méthode de Gauss.
3. Déterminer le rang et la signature de q.