Examen du 8 novembre 2022

Aucun document n'est autorisé.
Les calculatrices sont interdites.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (4 points) On considère le groupe $G = (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ des nombres réels strictement positifs muni de la multiplication.

1. Est-ce que le sous-ensemble $H_1 =]0, 1]$ des nombres réels $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < x \leq 1$ est un sous-groupe de G ? Justifier.
2. Est-ce que le sous-ensemble $H_2 =]\frac{1}{2}, 2[$ des nombres réels $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\frac{1}{2} < x < 2$ est un sous-groupe de G ? Justifier.
3. On considère l'application $f : G \to G$ donnée par $f(x) = x^2$. Est-ce que f est un homomorphisme de groupes ? isomorphisme de groupes ? Justifier.
4. On considère l'application $g : G \to G$ donnée par $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$. Est-ce que f est un homomorphisme de groupes ? isomorphisme de groupes ? Justifier.

Exercice 2 - (4 points) Trouver le plus grand entier ≤ 150 vérifiant les deux congruences

$$5x \equiv 1 \bmod 6 \quad \text{et} \quad 2x \equiv 5 \bmod 7.$$

Exercice 3 - (4 points) On considère un entier positif a ayant comme dernier chiffre $1, 3, 7$ ou 9.

1. Montrer que a et 100 sont premiers entre eux.
2. Enoncer le théorème d'Euler avec a et 100.
3. En déduire que a^{41} et a ont les mêmes deux derniers chiffres.

Exercice 4 - (4 points) On considère l'anneau $\mathbb{Z}/6^{1000}\mathbb{Z}$.

1. Combien y a-t-il de classes inversibles ?
2. Combien y a-t-il de classes non-inversibles ?
3. Parmi les entiers $0, 1, 2, \ldots, 6^{1000} - 1$ trouver le plus grand qui représente une classe non-inversible.

Exercice 5 - (4 points)

1. Combien y a-t-il d'homomorphismes de groupes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$? Justifier.
2. Parmi ces homomorphismes existe-t-il un homomorphisme injectif ? Si oui, combien ?
3. Parmi ces homomorphismes existe-t-il un homomorphisme surjectif ? Si oui, combien ?
4. Combien y a-t-il d'homomorphismes de groupes $g : \mathbb{Z}/99\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$? Justifier.