

Examen du 12 novembre 2019

Aucun document n'est autorisé.

Les calculatrices sont interdites.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 - (5 points) Soit G l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par $x \mapsto f(x) = ax + b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, muni de la composition des fonctions.

1. Est-ce que la loi de composition est commutative ?
2. Quel est l'élément neutre de G ?
3. Déterminer l'inverse de l'élément $f(x) = ax + b$.
4. Est-ce que G est un groupe ?
5. On considère $H = \{f \in G \mid f(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}$. Est-ce que H est un sous-groupe de G ?

Exercice 2 - (4 points) Soit A le sous-ensemble des nombres rationnels $r \in \mathbb{Q}$ qui s'écrivent comme quotient $r = \frac{m}{n}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$ et n impair.

1. Montrer que $(A, +, \cdot)$ est un anneau.
2. Est-ce que A est unitaire ?
3. Quels sont les inversibles de A ?

Exercice 3 - (4 points)

1. Est-ce que $\overline{18}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?
2. Est-ce que $\overline{42}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$? Si oui, quel est son inverse ?

Exercice 4 - (2 points) Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$:

$$\overline{7}x = \overline{2}.$$

Exercice 5 - (5 points) Soit $G = (\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$ le groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

1. Donner la liste de tous les éléments de G .
2. Pour tout $a \in G$, déterminer le sous-groupe $\langle a \rangle$ engendré par a .
3. Est-ce que (G, \cdot) est cyclique ?
4. Donner 2 éléments $a, b \in G$ tel que $G = \langle a, b \rangle$, c'est-à-dire a et b engendrent G .