

## Examen du 14 mai 2013

**Exercice 1** - Soit le jeu en forme normale suivant

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
|       | $y_1$ | $y_2$ |
| $x_1$ | (0,1) | (3,4) |
| $x_2$ | (2,1) | (1,0) |

- Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu ?
- On joue à ce jeu plusieurs fois. A chaque fois le joueur X joue la stratégie  $x_1$  avec la fréquence  $x \in [0, 1]$  et la stratégie  $x_2$  avec la fréquence  $1 - x$ . De même le joueur Y joue la stratégie  $y_1$  avec la fréquence  $y \in [0, 1]$  et la stratégie  $y_2$  avec la fréquence  $1 - y$ .
  - Donner les deux fonctions paiement  $u_X(x, y)$  et  $u_Y(x, y)$  pour les deux joueurs X et Y correspondant à leurs gains en stratégies mixtes avec fréquences  $x$  et  $y$ .
  - Déterminer les deux "fonctions" de meilleure réponse  $R_X(y)$  et  $R_Y(x)$  et donner leur représentation graphique.
  - Déterminer les équilibres de Nash en stratégies mixtes ? Parmi ces équilibres, lequel est le plus intéressant pour X ? pour Y ?

**Exercice 2** - On considère le jeu à deux joueurs et à somme nulle représenté par la matrice de paiement suivant :

|       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
| $x_1$ | 0     | 4     | 3     | 2     | 6     |
| $x_2$ | 4     | 0     | 2     | 5     | 1     |

- Y a-t-il des équilibres de Nash en stratégies pures ? Justifier la réponse.
- Y a-t-il des stratégies dominées ?
- Si le joueur X joue une stratégie mixte, quelles sont les deux stratégies "utiles" pour le joueur Y ?
- Déterminer les équilibres de Nash en stratégies mixtes en se ramenant à un jeu  $2 \times 2$ .

**Exercice 3** - Deux joueurs jouent le jeu suivant : à partir de la valeur 0 chacun des deux joueurs dit à son tour un nombre, obtenu du précédent en lui ajoutant 1 ou 2 ou 3. Le premier qui arrive à 2013 a gagné. Est-ce que le premier joueur a une stratégie gagnante ? Si oui, décrire la stratégie gagnante.