

## Examen du 13 mai 2014

**Exercice 1** - Soit le jeu en forme normale suivant

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
|       | $y_1$ | $y_2$ |
| $x_1$ | (0,1) | (3,4) |
| $x_2$ | (2,1) | (1,0) |

1. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu ?
2. On joue à ce jeu plusieurs fois. A chaque fois le joueur X joue la stratégie  $x_1$  avec la fréquence  $x \in [0, 1]$  et la stratégie  $x_2$  avec la fréquence  $1 - x$ . De même le joueur Y joue la stratégie  $y_1$  avec la fréquence  $y \in [0, 1]$  et la stratégie  $y_2$  avec la fréquence  $1 - y$ .
  - (a) Donner les deux fonctions paiement  $u_X(x, y)$  et  $u_Y(x, y)$  pour les deux joueurs X et Y correspondant à leurs gains en stratégies mixtes avec fréquences  $x$  et  $y$ .
  - (b) Déterminer les deux “fonctions” de meilleure réponse  $R_X(y)$  et  $R_Y(x)$  et donner leur représentation graphique.
  - (c) Déterminer les équilibres de Nash en stratégies mixtes ? Parmi ces équilibres, lequel est le plus intéressant pour X ? pour Y ?

**Exercice 2** - Deux généraux X et Y se battent pour quatre villes. Les quatre villes ont des intérêts stratégiques différents et on modélise cette situation en attribuant aux villes les points 1,2,3 et 4. Ainsi, la ville avec 1 point n'a qu'un faible intérêt stratégique, tandis que la ville avec 4 points a un grand intérêt stratégique. Le général X dispose de 3 régiments, alors que le général Y ne dispose que de 2 régiments. Chaque général doit décider vers quelles villes il envoie ses régiments sachant qu'il ne peut envoyer plus d'un régiment vers la même ville. Au moment de prendre la décision chaque général ignore ce que l'autre va décider. Si une ville est attaquée par un seul régiment, elle est gagnée par ce régiment. Si une ville est attaquée par deux régiments opposés (c'est-à-dire un de X et un de Y), rien ne se passe et la ville n'est prise ni par X ni par Y.

1. Donner les stratégies de X et de Y.
2. Donner sous forme d'un tableau la fonction paiement exprimée en points d'intérêt stratégique.
3. Y a-t-il une stratégie optimale pour X ? Pour Y ? Si oui, lesquelles ?

**Exercice 3** - Deux joueurs jouent le jeu suivant. A chaque étape le joueur qui doit jouer est face à un certain nombre de piles de jetons. Il doit prendre une des piles et doit la séparer en deux piles de tailles différentes (c'est-à-dire ayant un nombre différent de jetons). Ensuite, c'est le tour à l'autre joueur. Le joueur qui ne peut plus jouer (c'est-à-dire quand toutes les piles sont de taille 1 ou 2) a perdu. On commence la partie avec une seule pile de 6 jetons. Le premier joueur doit donc prendre cette unique pile et la séparer d'après la règle du jeu.

1. Donner le graphe associé à ce jeu.
2. Déterminer les positions gagnantes et perdantes.
3. Est-ce que le premier joueur a une stratégie gagnante ? Si oui, que doit-il jouer pour gagner la partie.