Corrigé de l'examen du 6 janvier 2022

Ex 1

1. On voit que $\text{ord}(\sigma) = 5$

donc $f(33) = f(3)$ car $33 \equiv 3\ [5]$

$= \sigma^3 = (52413)$

De même $\text{ord}(\tau) = 3$

donc $g(-10) = g(2)$ car $-10 \equiv 2\ [3]$.

$= \tau^2 = (243)$

2. $\sigma \circ \tau = (54321) \circ (234)$

$= (154)$

Donc $\text{ord}(\sigma \circ \tau) = 3$

3. $\ker(f) = 5\mathbb{Z}$, car $\text{ord}(\sigma) = 5$

$\ker(g) = 3\mathbb{Z}$, car $\text{ord}(\tau) = 3$

$\ker(h) = 3\mathbb{Z}$, car $\text{ord}(\sigma \circ \tau) = 3$

4. Non, on n'a pas $h(n) = f(n) \circ g(n)$ $\forall n$

car par exemple $g(3) = \text{Id}$, $h(3) = \text{Id}$

mais $f(3) \neq \text{Id}$.

Ex 2 On peut écrire

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

avec $a_i \in \{0, 1, 2, .., 9\}$ et $a_k \neq 0$

Comme $10 \equiv 1$ [9]

on obtient

$$M \equiv a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad [9]$$

$$\equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad [9]$$

$$\equiv S(M) \quad [9].$$

car par définition $S(M) = a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0$.

On peut aussi démontrer cette congruence par récurrence sur M.

$\boxed{\text{Ex 3}}$ 1. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2$

$= 1 + 2x^2 + x^4 - x^2$

$= 1 + x^2 + x^4$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la 1ère colonne.

$$= (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x & 0 \\ x & (1+x^2) \end{vmatrix}$$

$$= (1+x^2)(1+x^2+x^4) - x^2(1+x^2)$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + x^2 + x^4 + x^6 - x^2 - x^4$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6$$

2. On développe par rapport à la $1^{ère}$ colonne.

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} - x \cdot x \cdot \Delta_{n-2}$$

donc

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = x^2 \Delta_{n-1} - x^2 \Delta_{n-2}$$
$$= x^2 (\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2})$$

3. On pose $T_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$

d'après ce qui précède on a $T_1 = \Delta_1 - \Delta_0$

$$= (1+x^2) - 1 = x^2$$

et $T_n = x^2 T_{n-1}$

d'où $T_2 = x^4$, $T_3 = x^6$, $T_4 = x^8$

Par récurrence, on montre que $T_n = x^{2n}$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\Delta_n = \Delta_{n-1} + T_n$

$$= \Delta_{n-2} + T_{n-1} + T_n$$
$$\vdots$$
$$= \Delta_0 + T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} + T_n$$
$$= 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2} + x^{2n}.$$

Ex 4 1. On voit que $(1,0) \in A$ et $(0,1) \in A$
mais $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin A$
donc A n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$, car A n'est pas stable par la loi de composition.

2. On peut prendre par exemple
$F = \{ (x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{Z}) \}$.
Alors $\mathbb{Z} = F \subset A$
et F est un sous-groupe de A.

3. B est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$, car
- le neutre de $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire $(0,0)$, est dans B
- Si $(x_1, x_2) \in B$ et $(y_1, y_2) \in B$, alors $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in B$, car

$$2(x_1+y_1) + 3(x_2+y_2) = (2x_1+3x_2) + (2y_1+3y_2) = 0 + 0 = 0.$$

- Si $(x_1, x_2) \in B$, alors $(-x_1, -x_2) \in B$, car

$$2(-x_1) + 3(-x_2) = -(2x_1+3x_2) = 0.$$

4. Oui, B est un groupe cyclique. Un générateur de B est par exemple $(-3, 2)$
car d'après le lemme de Gauss tout élément de B peut s'écrire $(x_1, x_2) = (-3u, 2u)$ pour un $u \in \mathbb{Z}$

Ex 5

1. $$\underset{can}{\mathrm{Mat}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= xy + yz - zt + tx \\ &= (x+z)(y+t) - 2zt \\ &= \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{4}(x+z-y-t)^2 \\ &\quad - 2\left(\frac{1}{4}(z+t)^2 - \frac{1}{4}(z-t)^2\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(x+y+z+t)^2 - \frac{1}{4}(x+z-y-t)^2 - \frac{1}{2}(z+t)^2 + \frac{1}{2}(z-t)^2$$

3. rang de $q = 4$
signature de $q = (2,2)$

4. par exemple $v = (2,0,0,0)$
ou $w = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 0)$