Corrigé de l'examen du 8 janvier 2021.

Ex 1 1. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(\bar{n}) = n \cdot f(\bar{1})$
car f est un homomorphisme de groupes.

2. On a $f(\overline{20}) = f(\bar{0}) = 20 \cdot f(\bar{1}) = \bar{0}$,
donc l'ordre de $f(\bar{1})$ est un diviseur de 20.
Les valeurs possibles $y \in \mathbb{Z}/2020\mathbb{Z}$ sont donc les éléments dont l'ordre divise 20. Ce sont les éléments $y = \overline{101 \cdot k}$ avec $k = 0, 1, \ldots, 19$

3. Il y en a 20, voir question 2.

4. Les homomorphismes f injectifs correspondent aux éléments $y = \overline{101 \cdot k}$ d'ordre exactement 20 dans $\mathbb{Z}/2020\mathbb{Z}$, p.ex. $y = \overline{101}$.
Il y en a $\varphi(20) = 8$: $y = 101, 303, 707, 909, 1111, 1313, 1717, 1919$

5. non, car $|\mathrm{im}(f)| \leq 20$.

Ex 2 1. $|z| = 1 \Rightarrow z = 1, -1, i$ ou $-i$
2. La plus petite valeur de $|z|$ pour $z \in A$ est 1.
3. Si z est inversible dans A, alors il existe $z' \in A$ tel que $z \cdot z' = 1$.

Si on prend le module, on obtient. (2

$$|z| \cdot |z'| = |1| = 1.$$

Comme $|z| \geq 1$ et $|z'| \geq 1$. (d'après la question 2.)

on déduit que $|z| = 1$ et $|z'| = 1$, ~~donc~~ (~~d'après la~~

4. D'après la question 1, $z = 1, -1, i$ ou $-i$

On vérifie que ces 4 éléments sont bien inversibles.

5. Si $z = a+ib$, on obtient l'équation.

$$a^2 + b^2 = 1003$$

On réduit modulo 4

$$\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = \overline{1003} = \bar{3} \quad \text{dans } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

or ceci est impossible, car $\bar{a}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$ et

$\bar{b}^2 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$.

donc pas de solution dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

donc pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Ex 3}}$

$\sigma = (12)(345)(25) = (12345)$

donc σ est un cycle d'ordre 5, $\sigma^5 = \mathrm{Id}$.

Comme $2021 \equiv 1 \ [5]$.

on obtient $\sigma^{2021} = \sigma^1 = \sigma = (12345)$.

Ex 4

1. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 - bc$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & b \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a(a^2 - bc) - b(ac)$$

$$= a^3 - abc - abc$$

$$= a^3 - 2abc$$

2. On développe Δ_{n+2} par rapport à la première colonne.

$$\Delta_{n+2} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

$$= a \Delta_{n+1} - c \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

$$= a \Delta_{n+1} - bc \Delta_n$$

donc $\alpha = a$ et $\beta = -bc$.

Ex 5

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a par la formule de polarisation.

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2}\left[q(P+Q) - q(P) - q(Q)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(P(0)+Q(0))(P'(1)+Q'(1)) - P(0)P'(1) - Q(0)Q'(1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[P(0)Q'(1) + Q(0)P'(1)\right]$$

2. $P(0) = c$

$P'(X) = 2aX + b$, $P'(1) = 2a+b$.

donc $q(P) = c(2a+b) = 2ac + bc$

3. $q(P) = \frac{1}{4}(c+2a+b)^2 - \frac{1}{4}(c-2a-b)^2$

on utilise la formule

$$uv = \frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)$$

avec $u = c$ et $v = 2a+b$.

4. $\text{rang}(q) = 2$.

$\text{signature}(q) = (1,-1)$.