Corrigé de l'examen du 18 novembre 2020

Ex 1

1. . La loi $*$ est commutative, car $x * y = y * x$. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$. La loi $*$ est associative, car

$$(x*y)*z = x*(y*z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+$$

. L'élément neutre est 0, car $x * 0 = 0 * x = x$
$\forall x \in \mathbb{R}_+$

2. Le seul élément inversible dans $\mathbb{R}_+$ pour la loi $*$ est 0.

Ex 2

$5x \equiv 2 \mod 6 \iff x \equiv 4 \mod 6$
(on multiplie par 5 = inverse de $5 \mod 6$).

$3x \equiv 1 \mod 5 \iff x \equiv 2 \mod 5$
(on multiplie par 2 = inverse de $3 \mod 5$)

d'où le système de congruences.

$$\begin{cases} x \equiv 4 \mod 6 \\ x \equiv 2 \mod 5. \end{cases}$$

$x \equiv 2 \mod 5$	2	7	12	17	22	27
mod 6	2	1	0	5	4	3

d'où la solution $\boxed{x \equiv 22 \mod 30}$

Ex 3

1. A est unitaire, d'unité $(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$

2. Les éléments inversibles de A sont
$(\bar{1},\bar{1},\bar{1})$; $(\bar{1},\bar{1},\bar{3})$; $(\bar{1},\bar{2},\bar{1})$; $(\bar{1},\bar{2},\bar{3})$.

$|A^*| = 4$

3. Les éléments d'ordre 2 de $(A,+)$ sont
$(\bar{0},\bar{0},\bar{2})$; $(\bar{1},\bar{0},\bar{2})$; $(\bar{1},\bar{0},\bar{0})$.

4. D'après le lemme chinois, $\operatorname{pgcd}(3,4)=1$, on a un isomorphisme d'anneaux
$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

Donc A est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

L'image de $(\bar{0},\bar{1},\bar{2}) \in A$ est $(\bar{0},\overline{10}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

car $10 \equiv 1 \mod 3$
et $10 \equiv 2 \mod 4$

Ex 4

. $18 \equiv -1 \mod 19$ et $11^{18^{11}}$ est impair

donc $18^{11^{18^{11}}} \equiv -1 \mod 19$

. D'après le théorème de Fermat, on a.

$11^{18} \equiv 1 \mod 19$.

Comme $18 \mid 18^{11^{18}}$, on a $11^{18^{11^{18}}} \equiv 1 \mod 19$

donc $18^{11^{18^{11}}} + 11^{18^{11^{18}}} \equiv -1+1 = 0 \mod 19$.

donc ce nombre est divisible par 19.

Ex 5 1. On voit que $7 \times 4 + 27 \times (-1) = 1$,
donc $x = 4$ et $y = -1$ est une solution.
Comme $\text{pgcd}(7, 27) = 1$, les solutions sont de la forme
$$\begin{cases} x = 4 + 27k \\ y = -1 - 7k \end{cases} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$

2. L'inverse de $\overline{7}$ est $\overline{4}$ dans $\left(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}\right)^*$.

3. On multiplie l'équation $\overline{7}z = \overline{9}$ dans $\left(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}\right)$ avec l'inverse de $\overline{7}$, donc avec $\overline{4}$:
$$z = \overline{9} \cdot \overline{4} = \overline{36} = \overline{9}$$
Les solutions sont donc $z = 9 \mod 27$.
La plus petite solution positive est donc $z = 9$.