Corrigé de l'examen du 13 janvier 2020

Ex 1 $\boxed{1.}$

$$\begin{cases} 5x \equiv 2 \mod 6 \iff x \equiv 4 \mod 6 \\ 3x \equiv 1 \mod 5 \iff x \equiv 2 \mod 5 \end{cases}$$

(on multiplie avec inverse de $5 \mod 6 = 5$)

(on multiplie avec inverse de $3 \mod 5 = 2$

donc le système est équivalent au système $\begin{cases} x \equiv 4 \mod 6 \\ x \equiv 2 \mod 5 \end{cases}$

Il suffit de tester les solutions à la 2ème congruences ($x \equiv 2, 7, 12, 17, 22, 27 \mod 30$) dans la première congruence. On voit que la solution est $\boxed{x \equiv 22 \mod 30}$

$\boxed{2.}$ $\begin{cases} 2x \equiv 1 \mod 3 \\ x \equiv 4 \mod 6 \end{cases} \begin{matrix} \iff \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 4 \mod 6 \end{cases}$

mais $x \equiv 4 \mod 6$ implique que $x \equiv 1 \mod 3$ donc il n'y a pas de solution

Ex 2 Il y a deux éléments dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ d'ordre 6. Ce sont $\bar{3}$ et $\bar{5}$. Il y a donc deux isomorphismes entre $((\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}), +)$ et $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot)$ déterminées par l'image de $\bar{1}$ qui est $\bar{3}$ ou $\bar{5}$. De façon explicite :

$$\begin{matrix} \bar{0} \longmapsto \bar{1} \\ \bar{1} \longmapsto \bar{3} \\ \bar{2} \longmapsto \bar{2} \\ \bar{3} \longmapsto \bar{6} \\ \bar{4} \longmapsto \bar{4} \\ \bar{5} \longmapsto \bar{5} \end{matrix} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{matrix} \bar{0} \longmapsto \bar{1} \\ \bar{1} \longmapsto \bar{5} \\ \bar{2} \longmapsto \bar{4} \\ \bar{3} \longmapsto \bar{6} \\ \bar{4} \longmapsto \bar{2} \\ \bar{5} \longmapsto \bar{3} \end{matrix}$$

Ex 3 1) d'après le thm de Fermat.

$$5^{10} \equiv 1 \mod 11$$

Comme $10^{5^{10^5}} \equiv 0 \mod 10$, on obtient

$$5^{10^{5^{10^5}}} \equiv 1 \mod 11$$

2) $10 \equiv -1 \mod 11$ et $(-1)^2 \equiv 1 \mod 11$.

Comme $5^{10^{5^{10}}} \equiv +1 \mod 2$, on obtient.

$$10^{5^{10^{5^{10}}}} \equiv -1 \mod 11$$

donc $$5^{10^{5^{10^5}}} + 10^{5^{10^{5^{10}}}} \equiv 1 + (-1) \equiv 0 \mod 11$$

Ex 4 On calcule $\sigma = (1\,4\,6\,3\,5\,2)$. C'est un cycle de longueur 6. donc $ord(\sigma) = 6$ et $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Ex 5 On décompose σ en produit de cycles à supports disjoints. Comme $\sigma \in S_4$ cette décomposition est nécessairement l'une des suivantes

1) $\sigma = Id$
2) $\sigma =$ cycle d'ordre 3
3) $\sigma =$ produit de 2 transposition à support disjoint

pour 1) $\sigma^3 = Id$
pour 2) $\sigma^3 = Id$
pour 3) $\sigma^3 = \sigma$, car $\sigma^2 = Id$.

Donc on obtient les 9 permutations suivantes (3
$\sigma = Id, (123), (132), (124), (142), (143), (134), (234), (243)$.

Ex 6

$$\det(A) = \begin{array}{c} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 3 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \cdots & & & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \\ \\ L_n \end{array}$$

On remplace successivement L_n par $L_n - L_{n-1}$, puis L_{n-1} par $L_{n-1} - L_{n-2}$, L_{n-2} par $L_{n-2} - L_{n-3}$, ..., et à la fin L_2 par $L_2 - L_1$. On obtient ainsi

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & & C_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & -1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Ensuite, on remplace C_1 par $C_1 + C_n$, C_2 par $C_2 + C_n$, ..., C_{n-1} par $C_{n-1} + C_n$. On obtient ainsi

$$\det(A) = \begin{array}{c} \begin{matrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ & & -2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & -2 & -1 \\ & & & & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array}$$

donc $\det(A) = (-1)(-2)^{n-2}(n-1) = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-2}(n-1)$.

<u>Ex 7</u> • $q(x,y,z) = xy + 3xz - 7yz$

$$= (x-7z)(y+3z) + 21z^2$$

$$= \frac{1}{4}(x+y-4z)^2 - \frac{1}{4}(x-y-10z)^2 + 21z^2$$

(d'autres réduction de Gauss sont possibles).

• signature de $q = (2,1)$.

• noyau de $q = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.