Corrigé de l'examen du 16 janvier 2024

Ex 1

1. $\mathrm{rg}(q_1) = 3 \qquad \mathrm{sgn}(q_1) = (3,0)$

Pour déterminer le rang et la signature de q_2 il faut faire une réduction de Gauss.

$$q_2 = 2(x_1 + 2x_3)x_2$$
$$= \frac{2}{4}\left(x_1 + 2x_3 + x_2\right)^2 - \frac{2}{4}\left(x_1 + 2x_3 - x_2\right)^2$$

donc $\mathrm{rg}(q_2) = 2 \qquad \mathrm{sgn}(q_2) = (1,1)$

2. (a) $$r_t = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + t(2x_1x_2 + 4x_2x_3)$$
$$= \left(x_1^2 + 2tx_1x_2 + t^2x_2^2\right) - t^2x_2^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4tx_2x_3$$
$$= (x_1 + tx_2)^2 + (1-t^2)x_2^2 + \left(x_3^2 + 4tx_2x_3 + 4t^2x_2^2\right) - 4t^2x_2^2$$
$$= (x_1 + tx_2)^2 + (1-5t^2)x_2^2 + (x_3 + 2tx_2)^2$$

(b) Le rang maximal de r_t est 3

$$\mathrm{rg}(r_t) = 3 \iff 1 - 5t^2 \neq 0$$
$$\iff t \neq \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } t \neq -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(c) r_t est définie positive $\iff 1 - 5t^2 > 0$

$$\iff -\frac{\sqrt{5}}{5} < t < \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\iff t \in \left]-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right[.$$

Ex 2

1. $$\begin{vmatrix} T^2+1 & T^3+1 \\ T^3+1 & T^4+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T^2+1 & T^3-T^2 \\ T^3+1 & T^4-T^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} T^2+1 & T^2(T-1) \\ T^3+1 & T^3(T-1) \end{vmatrix} = T^2(T-1) \begin{vmatrix} T^2+1 & 1 \\ T^3+1 & T \end{vmatrix}$$

$$= T^2(T-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & T \end{vmatrix} = T^2(T-1)^2$$

2. $$\det(A_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} T^2+1 & T^3+1 & T^4+1 \\ T^3+1 & T^4+1 & T^5+1 \\ T^4+1 & T^5+1 & T^6+1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{array} = \begin{vmatrix} T^2+1 & T^3-T^2 & T^4-T^3 \\ T^3+1 & T^4-T^3 & T^5-T^4 \\ T^4+1 & T^5-T^4 & T^6-T^5 \end{vmatrix}$$

on observe que $C_3 = T \cdot C_2$, donc le déterminant est $= 0$.

3. Il suffit de faire les mêmes opérations que en 2 sur la matrice A_n, c'est-à-dire d'abord $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ et ensuite $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, on obtient.

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} T^2+1 & T^3-T^2 & T^4-T^3 & \cdots \\ T^3+1 & T^4-T^3 & T^5-T^4 & \\ T^4+1 & T^5-T^4 & T^6-T^5 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ T^n+1 & T^{n+1}-T^n & T^{n+2}-T^{n+1} & \end{vmatrix}$$

on observe que $C_3 = T \cdot C_2$, donc le déterminant est $= 0$.

Ex 3

1. $\sigma = (1234567)$ cycle d'ordre 7

2. $\text{ord}(\sigma) = 7$ et $2024 \equiv 1\ [7]$

donc $\sigma^{2024} = \sigma^1 = \sigma = (1234567)$

Ex 4

1. $1000 = 2^3 \cdot 5^3$

comme le dernier chiffre de a est $\neq 0,2,4,6,8$, on déduit que $\text{pgcd}(a,2) = 1$.

comme le dernier chiffre de a est $\neq 0,5$, on déduit que $\text{pgcd}(a,5) = 1$.

comme 1000 n'est divisible que par des nombres de la forme $2^i \cdot 5^j$, on déduit que

$$\text{pgcd}(a, 1000) = 1.$$

2. $a^{\varphi(1000)} \equiv 1\ [1000]$ avec $\varphi(1000) = 400$

3. le thm. d'Euler dit que $a^{400} \equiv 1\ [1000]$ si $\text{pgcd}(a,1000) = 1$

On multiplie avec a: $a^{401} \equiv a\ [1000]$.

comme $\text{pgcd}(627, 1000) = 1$, on obtient.

$$627^{401} \equiv 627\ [1000].$$

Ex 5

Le groupe $\left((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \cdot\right)$ a deux générateurs : $\bar{3}$ et $\bar{5}$

Cela donne les 2 isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \\ \bar{0} & \longmapsto & \bar{1} \\ \bar{1} & \longmapsto & \bar{3} \\ \bar{2} & \longmapsto & \bar{2} \\ \bar{3} & \longmapsto & \bar{6} \\ \bar{4} & \longmapsto & \bar{4} \\ \bar{5} & \longmapsto & \bar{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \\ \bar{0} & \longmapsto & \bar{1} \\ \bar{1} & \longmapsto & \bar{5} \\ \bar{2} & \longmapsto & \bar{4} \\ \bar{3} & \longmapsto & \bar{6} \\ \bar{4} & \longmapsto & \bar{2} \\ \bar{5} & \longmapsto & \bar{3} \end{array}$$