Corrigé de l'examen du 8 novembre 2022

Ex 1

1. non, car $\frac{1}{2} \in H_1$, mais $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \notin H_1$.

2. non, car $\frac{3}{2} \in H_2$, mais $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \notin H_2$

3. f est un homomorphisme de groupes, car
$\forall x, y \in G \quad f(xy) = (xy)^2 = x^2 y^2 = f(x) \cdot f(y)$

f est un isomorphisme de groupes, car
injectif $(\ker(f) = \{1\})$ et surjectif.

4. g n'est pas un homomorphisme de groupes,
car $g(xy) = \frac{xy+1}{2} \neq \left(\frac{x+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{y+1}{2}\right) = g(x) \cdot g(y)$
pour $x, y \in G$ général.

g n'est pas un isomorphisme, car g n'est pas un homomorphisme.

Ex 2

$5x \equiv 1 \mod 6 \iff x \equiv 5 \mod 6$
(on multiplie avec 5)

$2x \equiv 5 \mod 7 \iff x \equiv 6 \mod 7$
(on multiplie avec 4).

x	6	13	20	27	34	41
$x \mod 6$	0	1	2	3	4	5

Les deux congruences sont donc équivalentes à la congruence $\boxed{x \equiv 41 \mod 42}$

L'ensemble des solutions est donc

$$S = \{ x = 41 + 42k \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Le plus grand entier ≤ 150 dans S est donc

$$41 + 2 \cdot 42 = \boxed{125}$$

Ex 3 1. On a $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Il suffit de montrer que a est impair et a n'est pas divisible par 5.

Or a est impair, car le dernier chiffre de a est différent de 0, 2, 4, 6 et 8

et a n'est pas divisible par 5, car le dernier chiffre de a est différent de 0 et 5.

2. $$a^{\varphi(100)} \equiv 1 \mod 100$$

et $\varphi(100) = 100\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 40$

3. On multiplie la congruence précédente avec a : $$a^{41} \equiv a \mod 100$$

ce qui signifie que a^{41} et a ont les mêmes deux derniers chiffres.

Ex 4 1. Le nombre de classes inversibles dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ est égal à $\varphi(n)$.

Donc, dans le cas où $n = 6^{1000}$, il y a $\varphi(6^{1000})$ classes inversibles.

$$\text{et } \varphi(6^{1000}) = 6^{1000}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$= 6^{1000}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 6^{1000}$$

2. Le nombre de classes non-inversible est égal à $6^{1000} - \frac{1}{3}\cdot 6^{1000} = \frac{2}{3}\cdot 6^{1000}$

3. $6^{1000} - 2$ est non-inversible, car $2 \mid 6^{1000} - 2$ et $2 \mid 6^{1000}$

$\boxed{\text{Ex 5}}$ 1. Un homomorphisme de groupes $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$ est entièrement déterminé par $f(1)$, car 1 est un générateur de $\mathbb{Z}$. Il y a donc 99 homomorphismes de groupes.

2. Il n'y a pas d'homomorphisme injectif, car $\mathbb{Z}$ est infini et $\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$ est fini.

3. Pour que f soit surjectif, il faut que $f(1)$ soit un générateur de $\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$. Il y en a.
donc $\varphi(99) = 99\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{11}\right) = 99\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{11} = 3\cdot 2\cdot 10 = 60$

4. Si $g : \mathbb{Z}/99\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes, alors $g(\bar{0}) = g(99\cdot\bar{x}) = 99\cdot g(\bar{x}) = 0$
donc $g(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$

Donc le seul homomorphisme de groupes $g : \mathbb{Z}/99\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est l'homomorphisme nul, c'est-à-dire $g(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$.