Corrigé de l'examen du 23 mai 2018

1) QCM

1) B
2) B
3) A
4) C
5) B
6) D
7) E
8) A
9) D
10) E

2)

L'algorithme d'Euclide étendu donne comme solution particulière :

$$11 \cdot 3 \;+\; 8 \cdot (-4) = 1 = \text{pgcd}(8, 11)$$

On multiplie par 89 :

$$11 \cdot (267) + 8\,(-356) = 89.$$

D'où la solution générale de l'équation $11x + 8y = 89$

$$\begin{cases} x = 267 - 8\lambda \\ y = -356 + 11\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{Z}.$$

On cherche des solutions $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, on a donc les conditions

$$x \geq 0 \iff \lambda \leq \frac{267}{8} = 33,\ldots$$

$$y \geq 0 \iff \lambda \geq \frac{356}{11} = 32,\ldots$$

D'où l'unique solution dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{cases} x = 267 - 8 \cdot 33 = 3 \\ y = -356 + 11 \cdot 33 = 7 \end{cases}$$

Autre méthode : Il suffit de tester sur tous les entiers. $0 \leqslant x \leqslant 8$ et vérifier si $89 - 11x$ est divisible par 8.

3) 1) $a_0 = 1,\ b_0 = 0$, car $(1+\sqrt{3})^0 = 1 + \sqrt{3} \cdot 0 \Rightarrow d_0 = 1$.

$a_1 = 1,\ b_1 = 1$, car $(1+\sqrt{3})^1 = 1 + \sqrt{3} \cdot 1 \Rightarrow d_1 = 1$

$a_2 = 4,\ b_2 = 2$, car $(1+\sqrt{3})^2 = 2 + \sqrt{3} \cdot 4 \Rightarrow d_2 = 2$

$a_3 = 10,\ b_3 = 6$, car $(1+\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3} = 10 + 6\sqrt{3} \Rightarrow d_3 = 2$

2) On a la relation.

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \sqrt{3}\, b_{n+1} &= (1+\sqrt{3})^{n+1} \\ &= (1+\sqrt{3})^n \cdot (1+\sqrt{3}) \\ &= (a_n + \sqrt{3}\, b_n)(1+\sqrt{3}) \\ &= a_n + \sqrt{3}\, b_n + \sqrt{3}\, a_n + 3 b_n \\ &= (a_n + 3b_n) + \sqrt{3}\,(b_n + a_n). \end{aligned}$$

D'où les relations :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n. \end{cases}$$

3) On itère les formules précédentes

$$a_{n+1} = (a_{n-1} + 3b_{n-1}) + 3(a_{n-1} + b_{n-1})$$
$$= 4a_{n-1} + 6b_{n-1}$$

$$b_{n+1} = (a_{n-1} + 3b_{n-1}) + (a_{n-1} + b_{n-1})$$
$$= 2a_{n-1} + 4b_{n-1}.$$

4) $d_{n+1} = \mathrm{pgcd}(a_{n+1}, b_{n+1})$

$= \mathrm{pgcd}(4a_{n-1} + 6b_{n-1}, 2a_{n-1} + 4b_{n-1})$ (utiliser 3))

$= 2\,\mathrm{pgcd}(2a_{n-1} + 3b_{n-1}, a_{n-1} + 2b_{n-1})$ (factoriser 2)

$= 2\,\mathrm{pgcd}(-b_{n-1}, a_{n-1} + 2b_{n-1})$ (utiliser $\mathrm{pgcd}(x,y) = \mathrm{pgcd}(x-2y, y)$)

$= 2\,\mathrm{pgcd}(-b_{n-1}, a_{n-1})$ (utiliser $\mathrm{pgcd}(x,y) = \mathrm{pgcd}(x, y+2x)$)

$= 2\,\mathrm{pgcd}(a_{n-1}, +b_{n-1})$

$= 2\,d_{n-1}.$

5) On a les formules, en s'appuyant sur 1) et 4),

$$\begin{cases} d_n = 2^{\frac{n}{2}}, & \text{si } n \text{ pair.} \\ d_n = 2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$