Exercices supplémentaires

Exercice 1. *On munit* $\mathbb{R}$ *de la loi de composition*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad x \star y = xy + (x^2-1)(y^2-1).$$

Est-ce que cette loi est commutative ? associative ? A-t-elle un élément neutre ?

Exercice 2. *On munit* $\mathbb{R}$ *de la loi de composition*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad x \star y = \sqrt[3]{x^3+y^3}.$$

1. *Est-ce que cette loi est commutative ? associative ? A-t-elle un élément neutre ?*
2. *Montrer que l'application* $x \mapsto x^3$ *est un isomorphisme de groupes de* $(\mathbb{R}, \star)$ *vers* $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 3. *Pour les groupes suivants déterminer s'ils sont cycliques. Si oui, donner tous les générateurs.*

1. $G_1 = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$
2. $G_2 = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$
3. $G_3 = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
4. $G_4 = \mathrm{Ker}(\Phi : (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)), \qquad \Phi(x \mod 8) = x \mod 2$
5. $G_5 = \mathrm{Ker}(\Phi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)), \qquad \Phi(z) = z^5$

Exercice 4. *Est-ce que les applications suivantes sont des homomorphismes de groupes ? Justifier la réponse.*

1. $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +), \qquad f(x) = 2x+3$
2. $g : (\mathfrak{S}_5, \circ) \to (\mathfrak{S}_5, \circ), \qquad g(x) = x^2$
3. $h : ((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \cdot) \to ((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \cdot), \qquad h(\overline{x}) = \overline{x}^{-1}$
4. $l : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +), \qquad l(x, y) = (y, 2x)$

Exercice 5.
1. *Déterminer deux entiers* x, y *vérifiant la relation* $8x + 29y = 1$.
2. *En déduire l'inverse de* $\overline{8}$ *dans* $(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^*$.
3. *Déterminer les entiers* $x \in \mathbb{Z}$ *vérifiant* $8x \equiv 9 \mod 29$.

Exercice 6. *On considère la permutation* $\sigma = (12)(345)(6789)$ *dans* $\mathfrak{S}_9$. *Ecrire la puissance* σ^{2020} *comme produit de cycles à supports disjoints.*

Exercice 7. *Montrer qu'on a un isomorphisme d'anneaux*

$$\Phi : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}.$$

Déterminer les images $\Phi(\overline{1}, \overline{0})$ *et* $\Phi(\overline{0}, \overline{1})$.

Exercice 8. *Résoudre en nombres entiers l'équation* $x^2 + y^2 = 7z^2$.

Exercice 9. *Résoudre en nombres entiers l'équation* $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Exercice 10. *Sur une île déserte vivent 34 caméléons. Au départ 7 sont jaunes, 10 sont rouges et 17 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur, il ne se passe rien. Au bout d'un certain temps on constate que tous les caméléons ont la même couleur. Laquelle ?*

Indication : considérer par exemple la différence entre le nombre de caméléons rouges et jaunes modulo 3

Exercice 11. *Soit* G *un groupe et* $g \in G$ *un élément d'ordre* n. *Quel est l'ordre de* g^2 *?*

Exercice 12. *On définit deux applications linéaires* $s, r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *par leurs matrices dans la base canonique*

$$\mathrm{Mat}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Mat}(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que* r *et* s *sont des applications linéaires inversibles.*
2. *On considère le groupe des applications linéaires inversibles de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$, *noté* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. *Déterminer l'ordre de* r *et de* s *dans* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
3. *Montrer que* $rs = -sr$.
4. *En déduire que* $G = \{Id, s, r, sr, -Id, -s, -r, -sr\}$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
5. *Montrer que* G *est le sous-groupe de* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ *engendré par* r *et* s.