Groupe symétrique, forme multilinéaire

Exercice 1.

1. *Décomposer en produit de cycles à supports disjoints la permutation de* $\mathcal{S}_4$ *donnée comme produit de cycles*

$$\sigma_1 = (1423)(23)(143).$$

Déterminer l'ordre de σ_1 *dans le groupe* $\mathcal{S}_4$ *ainsi que sa signature* $\varepsilon(\sigma_1)$.

2. *Décomposer en produit de cycles à supports disjoints la permutation de* $\mathcal{S}_6$ *donnée comme produit de cycles*

$$\sigma_2 = (15)(234)(51)(12345)(423)(135).$$

Déterminer l'ordre de σ_2 *dans le groupe* $\mathcal{S}_6$ *ainsi que sa signature* $\varepsilon(\sigma_2)$.

Exercice 2.

1. *Vérifier qu'on a l'égalité*

$$(a_1\, a_2 \cdots a_k) = (a_1\, a_k)(a_1\, a_{k-1}) \cdots (a_1\, a_2).$$

En déduire que les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$.

2. *Vérifier qu'on a l'égalité*

$$(a_i\, a_j) = (1\, a_i)(1\, a_j)(1\, a_i).$$

En déduire que les n *transpositions* $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)$ *engendrent* $\mathcal{S}_n$.

Exercice 3. 1. *Soit* $(a_1\, a_2 \cdots a_k)$ *un cycle de longueur* k *et soit* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *une permutation quelconque. Montrer qu'on a l'égalité*

$$\sigma(a_1\, a_2 \cdots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\, \sigma(a_2) \cdots \sigma(a_k)).$$

2. *Combien y a-t-il de permutations* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *vérifiant la relation*

$$\sigma(12) = (12)\sigma?$$

Est-ce que l'ensemble de ces permutations forme un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ *?*

3. *Déterminer le centre de $\mathcal{S}_n$, c'est-à-dire le sous-groupe des éléments $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma s = s\sigma$ pour tout $s \in \mathcal{S}_n$.*

Exercice 4.

1. *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ vérifiant $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. Montrer que σ est un produit de transpositions à supports disjoints. Indication : Ecrire σ comme produit de cycles à supports disjoints et donner l'ordre de σ en fonction des longueurs des cycles.*
2. *Si $n \geqslant 3$ est impair et si $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, montrer que σ a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe i tel que $\sigma(i) = i$.*

Exercice 5. *Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est engendré par les cycles de longueur 3.*

Exercice 6. *Soient $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3), Z = (z_1, z_2, z_3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application*

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

est multilinéaire.

1. $\varphi(X, Y, Z) = x_1 + y_2 + z_3$
2. $\varphi(X, Y, Z) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$
3. $\varphi(X, Y, Z) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$
4. $\varphi(X, Y, Z) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$
5. $\varphi(X, Y, Z) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$
6. $\varphi(X, Y, Z) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$
7. $\varphi(X, Y, Z) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$

Exercice 7. *Montrer que l'espace des formes bilinéaires sur K^n est un K-espace vectoriel. En donner une base. Même question pour le sous-espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques et anti-symétriques.*

Exercice 8. *Donner toutes les formes trilinéaires alternées sur K^2. Plus généralement, que dire des formes m-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n lorsque $m > n$?*