Anneaux et corps

Exercice 1. *Est-ce que les ensembles munis des opérations suivantes sont des anneaux, des corps ?*

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$
3. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$
4. $(\{z \in \mathbb{C}\ | Re(z) \in \mathbb{Q}$ *et* $Im(z) \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$

Exercice 2.

1. *Soient X un ensemble et G un groupe. Montrer que l'on peut munir l'ensemble $\mathcal{F}(X, G)$ des applications de X dans G d'une structure de groupe.*
2. *Soient X un ensemble et A un anneau. Montrer que l'on peut munir l'ensemble $\mathcal{F}(X, A)$ des applications de X dans A d'une structure d'anneau.*
3. *Soient X un ensemble et K un corps. L'anneau $\mathcal{F}(X, K)$ est-il un corps ?*

Exercice 3. *Montrer que l'ensemble A^* des éléments inversibles d'un anneau A peut être muni d'une structure de groupe.*

Exercice 4. *Avec quel groupe d'ordre* 4 *les groupes suivants sont-ils isomorphes ?*

1. $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \cdot)$
2. $((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^*, \cdot)$
3. $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*, \cdot)$

Exercice 5. *Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$. Cet ensemble est appelé l'anneau des entiers de Gauss. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.*

Exercice 6. *Déterminer l'inverse de $\overline{526}$ dans $\mathbb{Z}/561\mathbb{Z}$.*

Exercice 7. *Montrer qu'il y a un isomorphisme d'anneaux*

$$\mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/168\mathbb{Z}.$$

Exercice 8.

1. *Soient G et H des anneaux. On note G^* et H^* les groupes des inversibles de G et H. Montrer que*

$$(G \times H)^* = G^* \times H^*.$$

2. *Soient $x \in G$ et $y \in H$ d'ordre fini. Montrer que l'ordre de $(x, y) \in G \times H$ est égal au $\text{ppcm}(o(x), o(y))$.*
3. *Calculer l'ordre de $\overline{526}$ dans $(\mathbb{Z}/561\mathbb{Z})^*$.*

Exercice 9.

1. *Montrer qu'un corps (commutatif) est un anneau intègre (si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$).*
2. *Est-ce que la réciproque est vraie ?*

Exercice 10. (Théorème de Wilson)

1. *Supposons que n est premier. Résoudre l'équation $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*
2. *Si n est premier, montrer que $(n-1)! \equiv -1 \mod n$.*
3. *Montrer que réciproquement si $(n-1)! \equiv -1 \mod n$, alors n est premier.*

Exercice 11. *Vrai ou faux ? Clarifier votre réponse.*

1. *Soit $f : R \longrightarrow S$ un morphisme d'anneaux. Si T est un sous-anneau de R, alors $f(T)$ est un sous-anneau de S.*
2. *Soit $f : R \longrightarrow S$ un morphisme d'anneaux. Si T est un sous-anneau de S, alors $f^{-1}(T)$ est un sous-anneau de R.*

Exercice 12. *Déterminer les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Q}$.*