Groupes

Exercice 1. *Pour chacune de ces opérations, étudier l'associativité, la commutativité, l'existence de l'élément neutre, l'existence de l'inverse :*

1. *On définit sur* $\mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto m + 2n$.
2. *On définit sur* $\mathbb{N}^*$, $(m, n) \mapsto pgcd(m, n)$.
3. *On définit sur* $\mathbb{N}^*$, $(m, n) \mapsto ppcm(m, n)$.
4. *Soit* X *un ensemble. On définit sur* $\mathcal{P}(X)$, $(A, B) \mapsto A \cap B$.
5. *Soit* X *un ensemble. On définit sur* $\mathcal{P}(X)$, $(A, B) \mapsto A \cup B$.
6. *Soit* X *un ensemble. On définit sur* $\mathcal{P}(X)$, $(A, B) \mapsto A \setminus B$.
7. *Soit* X *un ensemble. On définit sur l'ensemble des applications* $\mathcal{A}(X, X)$, $(f, g) \mapsto f \circ g$.
8. *Soit* $\mathcal{M}$ *l'ensemble des matrices carrées de taille* 2 *et à coefficients dans* $\mathbb{Z}$. *Pour* $(A, B) \mapsto A \times B$.

Exercice 2. *Dire pour quelle(s) raison(s) les opérations* $\star$ *suivantes ne munissent pas les ensembles* G *donnés d'une structure de groupe ?*

(a) $G = \mathbb{N}$, $\star =$ *l'addition des nombres ;*

(b) $G = \mathbb{N}^*$, $\star =$ *la multiplication des nombres ;*

(c) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ *la multiplication des nombres ;*

Exercice 3. *Pour* $n = 6, 7, 8$ *:*

1. *Dresser les tableaux d'addition et de multiplication dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. *Déterminer l'opposé (= inverse) de chaque élément du groupe* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
3. *Préciser les inverses des éléments inversibles (pour la multiplication dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*).*

Exercice 4. *Soit* ABC *un triangle équilatéral du plan. Déterminer l'ensemble des rotations qui laissent invariant le triangle. Montrer que c'est un groupe pour la loi* $\circ$ *(= composition des rotations).*

Exercice 5. *Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?*

1. $]-1, 1[$ *muni de la loi définie par* $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ *;*
2. $\mathbb{R}$ *muni de la loi de composition définie par* $x * y = x + y - xy$.

Exercice 6. *L'ensemble des bijections d'un ensemble E sur lui-même et noté $\mathcal{B}(E)$.*

1. *Montrer que $\mathcal{B}(E)$ muni de la composition est un groupe.*
2. *Si E est fini et son cardinal est n, on note $\mathcal{B}(E)$ par $\mathcal{S}_n$, et on l'appelle le groupe des permutations (ou groupe symétrique) à n éléments. Quel est l'ordre de $\mathcal{S}_n$?*
3. *Déterminer $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$.*
4. *Est-ce que le groupe $\mathcal{S}_n$ est commutatif ?*

Exercice 7. *Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subset G, H \neq \emptyset$. Montrer :*

$$\begin{gathered} H \text{ est un sous-groupe de } G \\ \Updownarrow \\ \forall x, y \in H : x * y^{-1} \in H. \end{gathered}$$

Exercice 8. *On considère le groupe $(\mathbb{Z}, +)$.*

1. *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.*
2. *Y a-t-il d'autres sous-groupes de $\mathbb{Z}$?*

Exercice 9. *Montrer que si H et K sont des sous-groupes de G alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G.*

Exercice 10. *Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.*

Exercice 11. *Si G est un groupe, on appelle centre de G et on note $Z(G)$ l'ensemble $\{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$.*

1. *Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.*
2. *Montrer que G est commutatif ssi $Z(G) = G$.*
3. *Calculer $Z(\mathcal{S}_3)$, où $\mathcal{S}_3$ est le groupe symétrique à 3 éléments.*

Exercice 12. *Soient $(G, \star)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\cdot$ par $(x, y) \cdot (x', y') = (x \star x', y \triangle y')$. Montrer que $(G \times H, \cdot)$ est un groupe.*

Exercice 13. *Donner les éléments du sous-groupe $< \overline{5} >$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, +)$. Quel est l'ordre du sous-groupe $< \overline{5} >$?*

Exercice 14. *On pose $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$. On considère les deux matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Démontrer que A et B sont d'ordres finis mais que AB est d'ordre infini.

Exercice 15. *Soit* G *un groupe commutatif. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de* G *forme un sous-groupe de* G.

Exercice 16. *Est-ce que les groupes suivants sont cycliques ? Si oui, donner un générateur. Sinon, démontrer qu'il n'existe pas de générateur pour ce groupe.*

1. $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$
2. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$
3. $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +)$
4. $(\mathbb{Q}, +)$

Exercice 17. *Soient* $(G, *)$ *un groupe et* H *un sous-groupe de* G.

1. *Soit* $a \in G$. *Montrer qu'il y a une bijection entre* H *et* $aH = \{a*h \mid h \in H\}$.
2. *On définit une relation* $\mathcal{R}$ *sur* G : $a\mathcal{R}b$ *si* $aH = bH$. *Est-elle une relation d'équivalence ? Si oui, quelle est la classe d'équivalence de* $a \in G$ *?*
3. *Si card*(G) *est fini, montrer que card*(H) *divise card*(G).
4. *Si card*(G) *est fini, montrer que l'ordre de chaque élément de* G *divise card*(G).

Exercice 18.

1. *Soient* $G = (\mathbb{Z}, +)$ *et* $H = 6\mathbb{Z}$ *un sous-groupe de* G. *Déterminer les classes à gauche (resp. à droite) de* G *suivant* H.
2. *Même question pour* $G = (\mathcal{S}_3, \circ)$ *et* $H = \{(12), id\}$.
3. *Même question pour* $G = (\mathcal{S}_3, \circ)$ *et* $H = \{(123), (132), id\}$.

Exercice 19.

1. *Donner l'ordre de chaque élément de* $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$. *Donner tous les sous-groupes de* $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$.
2. *Même question pour* $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
3. *Donner les générateurs de* $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 20. *Déterminer tous les sous-groupes du groupe symétrique* $\mathcal{S}_3$.

Exercice 21. *Soit* G *un groupe dont l'ordre est un nombre premier. Montrer que* G *est un groupe cyclique.*

Exercice 22. *Soit* $(G, \star)$ *un groupe. Montrer que si pour tout* $x \in G$, $x^2 = e$, *alors* G *est abélien.*

Exercice 23. *Montrer que l'application*

$$sgn : \mathbb{R}^* \longrightarrow \{1, -1\}$$

telle que $sgn(x) = 1$ *si* $x > 0$ *et* $sgn(x) = -1$ *si* $x < 0$, *est un morphisme de groupes.*

Exercice 24. *Vrai ou faux ? Clarifier votre réponse.*

1. *Soit* $f : G_1 \longrightarrow G_2$ *un morphisme de groupes. Si* H *est un sous-groupe de* G_1*, alors* $f(H)$ *est un sous-groupe de* G_2*.*
2. *Soit* $f : G_1 \longrightarrow G_2$ *un morphisme de groupes. Si* H *est un sous-groupe de* G_2*, alors* $f^{-1}(H)$ *est un sous-groupe de* G_1*.*

Exercice 25. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Soient* $(G, *)$ *et* $(H, \triangle)$ *des groupes et* $f : G \longrightarrow H$ *un homomorphisme de groupes. Montrer :*

1. $\forall g \in G$*, si* $ord_G(g) = n$*, alors* $ord_H(f(g)) \mid n$*.*
2. *Si* f *est injectif, alors* $\forall g \in G$*,* $ord_G(g) = ord_H(f(g))$*.*

Exercice 26. *Soient* $(G, *)$ *et* $(H, \triangle)$ *des groupes isomorphes. Montrer :*

1. $(G, *)$ *commutatif ssi* $(H, \triangle)$ *commutatif.*
2. $|G| = |H|$*, si* G *est fini.*
3. $\forall n, r \in \mathbb{N}$ *:* $(G, *)$ *a exactement* r *éléments d'ordre* n *ssi* $(H, \triangle)$ *a exactement* r *éléments d'ordre* n*.*

Exercice 27. *Montrer qu'un groupe cyclique d'ordre* $k \in \mathbb{N}^*$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$*.*

Exercice 28. *Est-ce que les groupes suivants sont isomorphes ?*

1. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ *et* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$
2. $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$ *et* $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$
3. $(\mathcal{S}_3, \circ)$ *et* $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$*.*

Exercice 29. *Déterminer, à isomorphisme près, les groupes d'ordre inférieur ou égal à* 5*.*

Exercice 30. *Soit* $f : (G_1, *) \longrightarrow (G_2, \triangle)$ *un morphisme de groupes.*

1. *Montrer que* f *est injectif si et seulement si* $Ker(f) = \{e_{G_1}\}$*.*
2. *Si* f *est un isomorphisme, montrer que son inverse* f^{-1} *est aussi un morphisme de groupes.*
3. *Soit* $y \in Im(f)$*. Si* $x \in f^{-1}(y)$*, montrer que* $f^{-1}(y) = x * Ker(f)$*.*
4. *Supposons que* G_1 *est fini. Montrer que* $|G_1| = |Ker(f)| \cdot |Im(f)|$*.*

Exercice 31. *Soit* G *un groupe. Montrer que l'application* $x \mapsto x^{-1}$ *est un morphisme si et seulement si* G *est commutatif.*

Exercice 32. *Décrire tous les homomorphismes de groupes de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}$*. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.*

Exercice 33.

1. *Montrer que le cercle* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *est un sous-groupe de* $\mathbb{C}^*$.
2. *Montrer que l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes et déterminer son inverse.

Exercice 34. *Soit* d *un diviseur de* n. *Montrer que le morphisme de réduction*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ x \mod n = [x]_n & \mapsto & x \mod d = [x]_d \end{array}$$

est bien défini et surjectif. Quel est son noyau ?

Exercice 35. *Soient* G *un groupe et* H *un sous-groupe de* G. *Soit* $g \in G$.

1. *Montrer que* $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ *est un sous-groupe de* G.
2. *Montrer qu'il existe une bijection entre* H *et* gHg^{-1}.