2) On dit que q est ~~définie~~ positive (resp. négative) si $\forall v \in V$ $q(v) \geq 0$ (resp. $q(v) \leq 0$).

3) On dit qu'un vecteur $v \in V$ est isotrope pour q si
$$q(v) = 0.$$

Théorème (Réduction de Gauss).

Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique de rang r. Alors il existe r formes linéaires indépendantes $l_1, l_2, \dots, l_r$ (donc $r \leq n$) ~~tel que~~ et des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ non nuls tel que $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{q(v) = \alpha_1 [l_1(v)]^2 + \alpha_2 [l_2(v)]^2 + \dots + \alpha_r [l_r(v)]^2.}$$

Rem : 1) Les r formes linéaires l_i ne sont pas uniques !

2) Rappel : On dit que la famille $\{l_1, \dots, l_r\}$ de formes linéaires est indépendante si
$c_1 l_1(v) + \dots + c_r l_r(v) = 0 \quad \forall v \in V$
alors $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$.
Par exemple, si l_1 dépend ~~que~~ de x_1 et pas les autres, l_2 dépend de x_2 et pas les autres, etc, alors les l_i sont indépendants.

3) La réduction de Gauss est un algorithme, qui permet de calculer de manière effective les formes linéaires l_i et les nombres réels α_i.

<u>Preuve</u> : Soient $x_1, \dots, x_n$ les formes linéaires "coordonnées" sur $\mathbb{R}^n$. On peut donc écrire la forme quadratique comme un polynôme homogène de degré 2 en les x_i

$$q(v) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} a_{ij} x_i x_j$$

$v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

<u>1er cas</u> : il existe un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\boxed{a_{ii} \neq 0}$. Pour simplifier la notation on va supposer que $i = 1$ et on note $a_{11} = a$.

On peut donc écrire :

$$q(v) = a x_1^2 + x_1 B(x_2, x_3, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n)$$

où B est une forme linéaire en les $x_2, \dots, x_n$.
et C ——— quadratique en les $x_2, \dots, x_n$.

ensuite on complète en un carré parfait.

$$= a\left(x_1^2 + x_1 \frac{B(x_2, \dots, x_n)}{a} + \frac{B(x_2, \dots, x_n)^2}{4a^2}\right) - \frac{B^2}{4a} + C$$

$$= a\left(x_1 + \frac{B}{2a}\right)^2 - \frac{B^2}{4a} + C$$

et on recommence avec la forme quadratique

$$q'(x_2, \dots, x_n) = -\frac{B^2(x_2, \dots, x_n)}{4a} + C(x_2, \dots, x_n)$$

qui ne dépend que des $x_2, \dots, x_n$

<u>2ème cas</u> : Tous les $\boxed{a_{ii} = 0}$ Comme $q \neq 0$ il existe alors un réel $a_{ij} \neq 0$. Pour simplifier.

la notation, on va supposer que $i=1$ et $j=2$ et on note $a_{12}=a$.

On peut donc écrire :

$$q(v) = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{a}\, x_1 x_2 + x_1\, B(x_3,\dots,x_n) + x_2\, C(x_3,\dots,x_n) + D(x_3,\dots,x_n)$$

où B et C sont des formes linéaires en les $x_3,\dots,x_n$.
D est une forme quadratique en les $x_3,\dots,x_n$.

$$= a\left(x_1+\frac{C}{a}\right)\left(x_2+\frac{B}{a}\right) - \frac{BC}{a} + D$$

ensuite on utilise l'identité

$$u\cdot v = \frac{1}{4}\left[(u+v)^2-(u-v)^2\right]$$

avec $u = x_1+\frac{C}{a}$ et $v = x_2+\frac{B}{a}$.

on a donc :

$$q(v) = \frac{a}{4}\left(x_1+x_2+\frac{C}{a}+\frac{B}{a}\right)^2 - \frac{a}{4}\left(x_1-x_2+\frac{C}{a}-\frac{B}{a}\right)^2 - \frac{BC}{a}+D.$$

on remarque maintenant que la forme quadratique $q'(v) = -\frac{BC}{a}+D$ ne dépend que de $x_3,\dots,x_n$ et on recommence la méthode avec q'. $\square$

Exemples : ① $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3$

$$= \left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right) - x_2^2 - x_2x_3$$

$$= (x_1+x_2)^2 - \left(x_2^2+x_2x_3+\frac{x_3^2}{4}\right) + \frac{x_3^2}{4}$$

$$= (x_1+x_2)^2 - \left(x_2+\frac{x_3}{2}\right)^2 + \frac{x_3^2}{4}.$$

② $q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_1x_3$

$$= (x_1+x_3)(x_2+2x_3) - 2x_3^2$$

$$= \frac{1}{4}(x_1+x_2+3x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2-x_3)^2 - 2x_3^2$$

③ $q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_1x_3$

(même forme quadratique ②)

$$= (x_2+2x_1)(x_3+x_1) - 2x_1^2$$

$$= \frac{1}{4}(3x_1+x_2+x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1+x_2-x_3)^2 - 2x_1^2$$

En comparant ② et ③ on voit que q se décompose de deux manières différentes suivant le choix du monôme x_ix_j.

<u>Prop</u> : Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique écrite sous forme réduite

$$q(v) = \alpha_1[l_1(v)]^2 + \alpha_2[l_2(v)]^2 + \dots + \alpha_r[l_r(v)]^2$$

avec $\alpha_i \neq 0$ et l_i linéairement indépendants.

Alors ① la forme bilinéaire symétrique Φ associée à q est donnée par

$$\Phi(v,w) = \alpha_1\, l_1(v)\, l_1(w) + \dots + \alpha_r\, l_r(v)\, l_r(w).$$

② q est non-dégénérée $\Leftrightarrow r = n$

$\mathrm{rg}(q) = r.$

(3) q est positive $\Longleftrightarrow$ $\alpha_i > 0 \quad \forall i$
(resp. négative) (resp $\alpha_i < 0 \quad \forall i$)

(4) q est définie $\Longleftrightarrow \begin{cases} r = n \\ \text{tous les } \alpha_i \text{ ont le même signe} \end{cases}$

Preuve : (1) est une conséquence de la formule de polarisation. p.ex. $q(v) = [\ell(v)]^2$

alors $\Phi(u, v) = \frac{1}{2}\left[[\ell(v+w)]^2 - [\ell(v)]^2 - [\ell(w)]^2\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[(\ell(v) + \ell(w))^2 - \ell(v)^2 - \ell(w)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ell(v)^2 + \ell(w)^2 + 2\ell(v)\ell(w) - \ell(v)^2 - \ell(w)^2\right]$$

$$= \ell(v)\ell(w).$$

(2) On peut compléter la famille libre $\{\ell_1, \dots, \ell_r\}$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ (= dual de $\mathbb{R}^n$) en une base $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ et considérer la base duale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$. c'est-à-dire $\ell_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Alors dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ la matrice associée à Φ est égale à

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \alpha_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

A est une matrice diagonale de rang r.

donc $\mathrm{rg}(q) = r$.

(3) Dans la base duale introduite en (2), on a $q(e_i) = \alpha_i$ donc si q positive, alors $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i$

et si $\alpha_i \geq 0 \ \forall i$, alors $q(v) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} \underbrace{(\ell_i(v))^2}_{\geq 0} \geq 0$.

(4) $\boxed{\Leftarrow}$ clair

$\boxed{\Rightarrow}$ Si q est définie, $\ker q = \{0\}$ car sinon $q(v) = 0$ pour $v \neq 0$, donc $r = n$.

Supposons que $\underset{\substack{\| \\ q(e_i)}}{\alpha_i} > 0$ et $\underset{\substack{\| \\ q(e_j)}}{\alpha_j} < 0$ $\quad i \neq j$

Alors par continuité de la fonction
$$t \mapsto q(te_i + (1-t)e_j) = f(t).$$
on a $f(0) = \alpha_j < 0$ et $f(1) = \alpha_i > 0$.
donc par le théorème des valeurs intermédiaires
il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que
$$f(t_0) = q(\underbrace{t_0 e_i + (1-t_0)e_j}_{\neq 0}) = 0$$
Ainsi q n'est pas défini, contradiction. $\square$

Thm. (Principe d'inertie de Sylvester).

Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Quelle que soit la forme réduite
$$q(v) = \alpha_1 [l_1(v)]^2 + \alpha_2 [l_2(v)]^2 + \cdots + \alpha_r [l_r(v)]^2$$
avec $\alpha_i \neq 0$ et l_i linéairement indépendants, le nombre r_+ des $\alpha_i > 0$ et le nombre r_- des $\alpha_i < 0$ sont toujours les mêmes. Le couple (r_+, r_-) est appelé la signature de q. De plus $r = r_+ + r_-$.
$= rg(q)$.

On admet ce théorème.

Exemples (voir plus haut)

(1) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 = (x_1+x_2)^2 - (x_2 + \frac{x_3}{2})^2 + \frac{x_3^2}{4}$ $\quad$ signature $(2,1)$

(2) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + 2x_1x_3$
$$= \frac{1}{4}(x_1+x_2+3x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2-x_3)^2 - 2x_3^2$$
$$= \frac{1}{4}(3x_1+x_2+x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1+x_2-x_3)^2 - 2x_1^2$$
Signature $(1,2)$.

Formes hermitiennes

Rappels sur $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ = corps des nombres complexes.

$z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$; $x = \mathrm{Re}(z)$; $y = \mathrm{Im}(z)$

partie réelle / partie imaginaire.

- conjugaison complexe $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. $z = x+iy \mapsto \bar{z} = x - iy$.
- module d'un nombre complexe $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$.
- $\mathbb{C}$ est un corps et $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ($=n$).

Déf : Une forme hermitienne sur V est une application $h : V \times V \to \mathbb{C}$ qui vérifie.

(1) h est $\mathbb{C}$-linéaire en la 2ème variable, c'est-à-dire

$\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$h(u, \alpha v + \beta w) = \alpha h(u,v) + \beta h(u,w)$$

(2) h est $\mathbb{C}$-anti-linéaire en la 1ère variable, c'est-à-dire.

$\forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$h(\alpha v + \beta w, u) = \bar{\alpha}\, h(v,u) + \bar{\beta} (w,u).$$

(3) on a la symétrie hermitienne :

$\forall u, v \in V$

$$h(v,u) = \overline{h(u,v)}.$$

<u>Rem</u> : La propriété (2) est une conséquence de la propriété (1).

<u>Exemples</u> ① la forme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$: $u = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.
$v = (z'_1, \dots, z'_n) \in \mathbb{C}^n$.

$$h(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}\, z'_i \qquad h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}.$$

② $V = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ $\quad h : V \times V \to \mathbb{C}$.

$$h(A,B) = \operatorname{tr}({}^t\overline{A}\, B) \qquad \text{forme hermitienne.}$$

$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ si $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

③ $V = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$.

$$h : V \times V \to \mathbb{C} \qquad h(f,g) = \int_0^1 \overline{f(t)}\, g(t)\, dt.$$

forme hermitienne.

Soit $h : V \times V \to \mathbb{C}$ une forme hermitienne sur V.
On associe à h la forme quadratique réelle

$$q_h : V \to \mathbb{R} \qquad q_h(v) = h(v,v) \quad \forall v \in V$$

Il est clair que q_h est à valeurs réelles, car $\overline{q_h(v)} = q_h(v)$.

<u>Rem</u> : (Exercice) La forme associée $q_h : V \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique réelle pour la forme bilinéaire symétrique réelle $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi = \operatorname{Re}(h)$

partie réelle de h.

V est considéré ici comme un $\mathbb{R}$-esp. vectoriel.

Prop : La forme hermitienne $h : V \times V \to \mathbb{C}$ est déterminée par sa forme quadratique $q_h : V \to \mathbb{R}$ associée via la formule de polarisation.

$$\boxed{h(u,v) = \frac{1}{4}\left[q_h(u+v) - q_h(u-v) + i q_h(u-iv) - i q_h(u+iv)\right]}$$

Preuve :