Quelques recettes de calcul de déterminants :

* développer par rapport ligne/colonne qui contient le plus de zéros.
* ajouter un multiple d'une ligne/colonne à une autre afin de simplifier le déterminant, car

$$\det(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots v_n) = \det(v_1, v_2, \ldots, v_i + \lambda v_1, \ldots, v_n)$$

$$\forall \lambda \in K \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Chap. 8

Formes quadratiques.

Soit K un corps (on suppose $K \neq \mathbb{F}_2$).

Déf : Une forme quadratique $q : V \to K$ sur un K-espace vectoriel V est une application q qui vérifie

$$\boxed{q(v) = \Phi(v, v)}$$

où $\Phi : V \times V \to K$ est une application bilinéaire symétrique.

Rem : Le mot "quadratique" provient du fait qu'en dimension finie, une forme quadratique $q : V \to K$ est un polynôme homogène de degré 2 en les variables sur V. On a donc $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ $\forall \lambda \in K$ et $\forall v \in V$.

Prop. (formule de polarisation)

La correspondence entre formes quadratiques q et forme bilinéaire symétrique Φ est bijective. Étant donné q on retrouve Φ à partir de la formule de polarisation :

$$\boxed{\Phi(v,w) = \frac{1}{2}\left[q(v+w) - q(v) - q(w)\right]}$$

Preuve : Supposons que q provient de la forme bilinéaire symétrique Φ. Alors on a par bilinéarité

$$q(v+w) - q(v) - q(w)$$
$$= \Phi(v+w, v+w) - \Phi(v,v) - \Phi(w,w)$$
$$= \cancel{\Phi(v,v)} + \Phi(v,w) + \Phi(w,v) + \cancel{\Phi(w,w)} - \cancel{\Phi(v,v)} - \cancel{\Phi(w,w)}$$
$$= 2\Phi(v,w) \quad \text{(par symétrie)}$$

d'où la formule annoncée.

Inversément, si on pose $v=w$ dans cette formule on obtient $\Phi(v,v) = \frac{1}{2}\left[q(2v) - 2q(v)\right] = \frac{1}{2}\left[2q(v)\right] = q(v)$

$\square$

Exemples (1) Le produit scalaire $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\underset{(x_1,x_2,x_3)}{\underset{\parallel}{(x}}, \underset{(y_1,y_2,y_3)}{\underset{\parallel}{y)}} \longmapsto \langle x|y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.

La forme quadratique q associée au produit scalaire est

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

(2) $V = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ = $\mathbb{R}$-esp. vect. des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$q : V \to \mathbb{R}$ $\quad q(f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt$ est une forme quadratique, car q provient de la forme bilinéaire symétrique.

$$\Phi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Représentation matricielle d'une forme quadratique / forme bilinéaire

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie $(=n)$ muni d'une base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Soit $\Phi : V \times V \to K$ une forme bilinéaire symétrique sur V. Alors pour

$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $w = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, on peut écrire.

$$\Phi(v,w) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} x_i y_j \, \Phi(e_i, e_j).$$

On introduit la matrice $\overbrace{A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}}^{\text{carrée d'ordre } n}$ avec

$$\boxed{a_{ij} = \Phi(e_i, e_j)}$$

A est appelée la matrice associée à Φ dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Déf: Une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ est appelée **symétrique** si

$$\boxed{{}^tM = M} \quad \text{c'est-à-dire } m_{ij} = m_{ji} \ \forall i \forall j$$

Rem: Par symétrie de Φ il est clair que la matrice A associée à Φ est aussi symétrique.

Inversement, étant donné une matrice A symétrique d'ordre n, on peut lui associer la forme bilinéaire symétrique définie par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\Phi(X,Y) = {}^tXAY.}$$; où X et Y sont deux vecteurs colonnes.

Exemple: $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $q(x_1,x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 7x_2^2$ est représentée par la matrice symétrique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

car $\Phi(X,Y) = {}^tXAY = (x_1 \, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $= x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 7y_1y_2$

Déf 1) Soit Φ une forme bilinéaire symétrique sur V.
On appelle **noyau de Φ**, noté $\ker \Phi$, le sous-espace vectoriel

$$\ker \Phi = \{ v \in V \mid \Phi(v,w) = 0 \ \forall w \in V \}.$$

2) On dit que Φ (ou q) est non-dégénérée, si $\ker \Phi = \{0\}$.

3) Si $\dim V$ est finie, on appelle rang de Φ ou de q, le rang de la matrice A associée à Φ.

Rem : Il est clair que Φ est non-dégénérée $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(\Phi) = \dim(V)$.

Exemples : (1) Sur $\mathbb{R}^3$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^*$ la forme bilinéaire symétrique

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\Phi(X, Y) = \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \alpha_3 x_3 y_3$$

est non-dégénérée.

(2) $$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\Phi(X, Y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

est de rang 1 et de noyau $\ker \Phi = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\Phi(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée.

A partir de maintenant on suppose que

$$\boxed{K = \mathbb{R}}$$

Déf : Soit $q : V \to \mathbb{R}$ une forme quadratique réelle.

1) On dit que q est définie si

$$q(v) = 0 \Rightarrow v = 0.$$

2) On dit que q est ~~définie~~ positive (resp. négative) si $\forall v \in V$ $q(v) \geq 0$ (resp. $q(v) \leq 0$).

3) On dit qu'un vecteur $v \in V$ est isotrope pour q si
$$q(v) = 0.$$

Théorème (Réduction de Gauss).

Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique de rang r. Alors il existe r formes linéaires indépendantes $l_1, l_2, \dots, l_r$ (donc $r \leq n$) ~~tel que~~ et des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ non nuls tel que $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{q(v) = \alpha_1 [l_1(v)]^2 + \alpha_2 [l_2(v)]^2 + \dots + \alpha_r [l_r(v)]^2.}$$

Rem : 1) Les r formes linéaires ne sont pas uniques !

2) Rappel : On dit que la famille $\{l_1, \dots, l_r\}$ de formes linéaires est indépendante si
$$c_1 l_1(v) + \dots + c_r l_r(v) = 0 \quad \forall v \in V$$
alors $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$.

Par exemple, si l_1 ~~ne~~ dépend ~~que~~ de x_1 et pas les autres, l_2 ~~ne~~ dépend de x_2 et pas les autres, etc, alors les l_i sont indépendants.