Rappels d'algèbre linéaire et formes multilinéaires

Soit K un corps, par exemple $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{F}_p$.
(Rem.: Dans certains résultats il faut exclure $\mathbb{F}_2$).

Déf: Un espace vectoriel V sur K est un groupe abélien $(V, +)$ muni d'une opération de K sur V (appelé multiplication externe).

vérifiant
1) $\lambda.(v+w) = \lambda.v + \lambda.w$ $\quad \forall \lambda \in K, \forall v, w \in V$
2) $(\lambda+\mu).v = \lambda.v + \mu.v$ $\quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$
3) $(\lambda.\mu)v = \lambda.(\mu.v)$ $\quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall v \in V$.
4) $\underset{\uparrow \text{unité de } K}{1}.v = v$ $\quad \forall v \in V$

Les éléments de V sont appelés les vecteurs
les éléments de K sont appelés les scalaires

Exemples:
- $V = K^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) ; \lambda_i \in K\}$.
- $V = K[X] = \{$polynômes en 1 variable $X\}$
$= \{a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d ; a_d \in K\}$.
- $V \subset K^n$
$V = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = 0\}$. hyperplan dans K^n.

plus généralement intersection d'hyperplans dans K^n

- $V = \{$fonctions continues / dérivables / $\dots$ $f : \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{I}} \to \mathbb{R} \}$.

Déf: Une application linéaire entre deux espaces vectoriels $f : V \to W$ est une application qui vérifie
1) $f(\lambda v) = \lambda . f(v)$ $\forall \lambda \in K$ $\forall v \in V$
2) $f(v+w) = f(v) + f(w)$ $\forall v, w \in V$.

Rem: 1) Si V peut être engendré linéairement par un nombre fini de vecteurs, on dit que V est de dimension finie.

3) $\dim V$ = nombre d'éléments d'une base (de toute base).

2) Tout espace vectoriel V de dimension finie admet une base.

Déf: Une forme bilinéaire sur V est une application
$$\Phi : V \times V \to K$$
vérifiant 1) $\Phi(-, v_2)$ linéaire $\forall v_2 \in V$
2) $\Phi(v_1, -)$ linéaire. $\forall v_1 \in V$.

Exemple: 1) $V = K^n$ $\quad \Phi((x_1, \dots, x_n); (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

(p.ex. produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$).

2) $V = \{$fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}\}$.
$$\Phi(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt.$$

Déf : Une forme bilinéaire $\Phi : V \times V \to K$ est
1) **symétrique** si $\Phi(v,w) = \Phi(w,v)$ $\forall v, w \in V$
2) **alternée** (ou **antisymétrique**) si
$$\Phi(v,w) = -\Phi(w,v) \quad \forall v, w \in V.$$

Exemple : Le produit scalaire. (Ex 1) est ~~sym~~ une forme bilinéaire symétrique.

Prop : Soit $\Phi : V \times V \to K$ est une forme bilinéaire.
Φ alternée $\iff$ $\Phi(u,u) = 0$ $\forall u \in V$.

(Rem : Ici on doit supposer $K \neq \mathbb{F}_2$).

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ on pose $v = w = u$ et on obtient.
$$\Phi(u,u) = -\Phi(u,u) \Rightarrow \Phi(u,u) = 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Il suffit de prendre $u = v + w$ et de développer Φ par bilinéarité

$$0 = \Phi(u,u) = \Phi(v+w, v+w)$$
$$= \underbrace{\Phi(v,v)}_{=0} + \Phi(v,w) + \Phi(w,v) + \underbrace{\Phi(w,w)}_{=0}.$$

d'où : $\Phi(v,w) = -\Phi(w,v)$. $\square$

Déf : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$. Une **forme multi-linéaire** (d'ordre k) est une application.
$$\Phi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k \text{ fois}} \longrightarrow K$$

tel que $\forall v_1, \dots, v_k \in V$ et $\forall i \in \{1, \dots, k\}$

$$\Phi(v_1, \dots, v_{i-1}, -, v_i, \dots, v_k) \text{ linéaire} : V \to K.$$

c'est-à-dire Φ est une forme linéaire en chacune des k variables.

Déf : Une forme multilinéaire $\Phi : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ fois}} \to K$ est alternée si $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ $i \neq j$

$$\Phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\Phi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

on échange les vecteurs v_i et v_j

Prop : Soit $\phi : V^{\times k} \to K$ une forme multilinéaire. Alors.

1) Φ alternée $\iff$ $\forall i,j \in \{1, \dots, k\}$ $i \neq j$

$$\Phi(v_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position } i}}{v}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{position } j}}{v}, \dots, v_k) = 0$$

(même vecteur v en position i et j).

~~[illegible]~~

Preuve : Si Φ est alternée, alors $\Phi(v_1, \dots, v_{i-1}, -, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, -, v_{j+1}, \dots, v_k)$ est une forme bilinéaire alternée. On peut conclure alors comme dans la proposition précédente. $\square$

Prop : Soit $\phi : V^{\times k} \to K$ une forme multilinéaire alternée.
Alors $\Phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{signature de } \sigma}}{\varepsilon(\sigma)} \Phi(v_1, v_2, \dots, v_k)$.

$\forall \sigma \in S_k$ $\forall v_1, v_2, \dots, v_k \in V$

Preuve : Si σ = transposition (ij) c'est la définition de Φ alternée.
D'après le chapitre précédent tout $\sigma \in S_k$ est produit de transpositions $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_N$. Il suffit d'appliquer N fois la relation précédente, sachant que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.

Chap. 7

Déterminant

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie $= n$.

Prop: Il existe à un scalaire multiplicatif près une unique forme multilinéaire alternée sur V d'ordre $n = \dim V$.

De manière explicite, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de V et si pour $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad ; \quad a_{ij} \in K$$

alors pour Φ une forme multilinéaire alternée d'ordre n, on a.

$$(*) \quad \Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \right) \Phi(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Preuve: On note App_n l'ensemble de toutes les applications. $\sigma : E_n \to E_n$, pas nécessairement bijectives.

Alors $|App_n| = n^n$ et $S_n \subset App_n$. Alors on peut écrire pour Φ multilinéaire alternée

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i2} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in} e_i \right)$$

$$= \sum_{\sigma \in App_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \Phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$$

Si σ n'est pas injectif, alors $\exists \alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$ $\alpha \neq \beta$ tel que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

donc $\Phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = 0$.

car Φ alternée et 2 vecteurs égaux.

Donc seuls les σ injectif (donc bijectif) donne des termes non nuls.

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \, \Phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n).$$

Inversément, montrons que l'application définie par $(*)$ est une forme multilinéaire alternée non-nulle. Il est clair que $(*)$ est multilinéaire. Vérifions donc que Φ est alternée. ~~...~~ ~~...~~ Afin de simplifier les calculs, on a seulement montrer que.

$$\Phi(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n) = -\Phi(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

or $\Phi(v_2, v_1, v_3, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a'_{\sigma(j)j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n).$

avec $a'_{i1} = a_{i2}$

$a'_{i2} = a_{i1}$

$a'_{ij} = a_{ij}$ pour $j \geq 3$

Donc $\prod_{j=1}^{n} a'_{\sigma(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma \circ \tau(j) j}$ où $\tau = (12) \in S_n$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma\circ\tau(j)j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n)$$

$$= \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon(\tau)}} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma\circ\tau) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma\circ\tau(j)j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n)$$

on pose $\sigma' = \sigma\circ\tau$

$$= - \left(\sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma'(j)j} \right) \Phi(e_1, \dots, e_n).$$

Donc (*) définit une forme multilinéaire alternée, qui est déterminée par $\Phi(e_1, \dots, e_n)$. $\square$.

Déf : Si $V = K^n$, alors Φ tel que $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$ pour $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canonique de K^n, est appelé le **déterminant**, noté det.

$$\det : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n \text{ fois}} \longrightarrow K.$$

$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}.$$

avec $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$

Notation matricielle : Soit $A = \mathrm{Mat}_{\{e_1, \dots, e_n\}} \{v_1, \dots, v_n\}$, c'est-à-dire

$A = (a_{ij})_{ij}$ coeff i-ème ligne, j-ème colonne $= a_{ij}$

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$:
$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}}$$

Prop. : Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. On note ${}^tA$ = transposée de A.
Alors :

$$\boxed{\det({}^tA) = \det(A).}$$

Preuve : ${}^tA$ est la matrice $({}^ta_{ij})$ avec ${}^ta_{ij} = a_{ji}$

Donc $\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} {}^ta_{\sigma(j)j}$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}$$

or on peut écrire.

$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$

(car σ est une bijection. Il suffit de permuter les facteurs.).

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j}$$

or $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ et $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de S_n.

$$= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j}$$

$$= \det(A).$$

$\square$

Prop. : (Développement par rapport à une ligne/colonne).