Chap. 5

Groupe symétrique

Soit $n \geq 2$ un entier.
On note S_n le groupe symétrique à n lettres/objets, c'est-à-dire le groupe des bijections de l'ensemble
$$E_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

$(S_n, \circ)$ est un groupe:
$\circ$ = composition des bijections
neutre = Id, c'est-à-dire $Id(x) = x \quad \forall x \in \{1, .., n\}$.
σ^{-1} = inverse au sens des bijections.

Rem: $|S_n| = n!$

Notations et éléments distingués

On appelle cycle de longueur $k \geq 2$, noté
$$\sigma = (\underrightarrow{a_1 \, a_2 \cdots a_k})$$
où $a_i \in E_n$ sont k entiers distincts

et défini par
$$\begin{cases} \sigma(x) = x & \text{si } x \neq a_i \\ \sigma(a_i) = a_{i+1} & \text{si } i \in \{1, .., k-1\}. \\ \sigma(a_k) = a_1. \end{cases}$$

L'ensemble $\{a_1, \dots, a_k\} \subset E_n$ est appelé le support du cycle σ.
Un cycle de longueur 2 est appelé une transposition.

Prop : Toute permutation $\sigma \in S_n$ peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints.
(éventuellement vide)

Preuve :
- par récurrence sur n.
- pour $n=2$, évident car $S_2 = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{produit vide}}}{Id}, (12) \}$.

- Soit $\sigma \in S_n$ et considérons l'orbite de 1, c'est-à-dire l'ensemble fini

$$\mathcal{O} = \{ \sigma^a(1) \mid a \in \mathbb{N} \} = \{ 1, \sigma(1), \sigma^2(1), \sigma^3(1), \dots \} \subset E_n$$

Alors $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble fini de E_n, dont on note le cardinal $k \geq 1$. Alors.

$$\mathcal{O} = \{ 1, \sigma(1), \sigma^2(1), \dots, \sigma^{k-1}(1) \}$$

car les k éléments sont distincts. Sinon on aurait $|\mathcal{O}| < k$.

De plus $\sigma^k(1) = 1$. En effet, si $\sigma^k(1) = \sigma^i(1)$ pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$ on obtiendrait en appliquant l'inverse σ^{-1} : $\sigma^{k-1}(1) = \sigma^{i-1}(1)$, ce qui contredit le fait que $1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k-1}(1)$ sont distincts.

Donc, on a une réunion disjointe

$$E_n = \mathcal{O} \cup (E_n \setminus \mathcal{O}).$$

Il est clair que si $x \notin \mathcal{O}$, alors $\sigma(x) \notin \mathcal{O}$. Donc la permutation laisse stable les sous-ensembles $\mathcal{O}$ et $E_n \setminus \mathcal{O}$.

On définit $\sigma_\theta \in S_n$ par

$$\begin{cases} \sigma_\theta(x) = \sigma(x) & \text{si } x \in \theta \\ \sigma_\theta(x) = x & \text{si } x \notin \theta \end{cases}$$

et $\sigma_{\bar\theta} \in S_n$ par $\sigma_{\bar\theta}(x) = \sigma(x)$ si $x \notin \theta$

$\sigma_{\bar\theta}(x) = x$ si $x \in \theta$.

Alors il est clair que.

1) $\sigma_\theta = (1\ \sigma(1)\ \sigma^2(1)\ \cdots\ \sigma^{k-1}(1))$ cycle de longueur k.

2) $\sigma = \sigma_\theta \circ \sigma_{\bar\theta} = \sigma_{\bar\theta} \circ \sigma_\theta$

On peut conclure maintenant par récurrence, car. $\sigma_{\bar\theta}$ peut être considérée comme une permutation du sous-ensemble $E_n \setminus \theta \xrightarrow{\sim} E_{n-k}$ (on choisit une bijection entre $E_n \setminus \theta$ et $\{1, 2, \dots, n-k\}$).

Donc $\sigma_{\bar\theta} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_N$ avec σ_i = cycles de supports disjoints.

Donc $\sigma = \sigma_\theta \circ \tilde\sigma_1 \circ \tilde\sigma_2 \circ \cdots \circ \tilde\sigma_N$; où $\tilde\sigma_i$ = extension de σ_i à E_n par id sur θ.

Rem: ~~Pour une t~~ Si σ_1 et σ_2 sont deux cycles à supports disjoints, alors. $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

Prop: Toute permutation $\sigma \in S_n$ est produit ~~(fini)~~ de transpositions.

<u>Preuve</u> : D'après la proposition précédente il suffit de montrer qu'un cycle de longueur k est produit de transpositions. Prenons le cycle $(1\ 2\ 3 \cdots k)$. Alors on peut écrire

$$(1\ 2\ 3 \cdots k) = \overbrace{(1k)(1\ k\text{-}1)(1\ k\text{-}2) \cdots (13)(12)}^{(k-1)\text{ transpositions}}.$$

Pour un autre cycle il suffit de choisir une bijection entre le support du cycle et $\{1,2,3,\dots,k\}$.

$\square$

<u>Exemple</u> : dans S_5 la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \sigma(1)=2 \\ \sigma(2)=3 \\ \sigma(3)=1 \\ \sigma(4)=5 \\ \sigma(5)=4 \end{array}$$

est donné par le produit $\sigma = (123)(45) = (45)(123)$

<u>Théorème</u> : Il existe un homomorphisme de groupe

$$\varepsilon : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$$

appelé signature, tel que $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition $\tau \in S_n$. De manière plus général.

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$ pour tout cycle σ de longueur k.

<u>Preuve</u> : Soit Σ l'ensemble des sous-ensemble de cardinal 2 de E_n, c'est-à-dire.

$$\Sigma = \{ \{i,j\} \mid i \neq j,\ i,j \in E_n \}.$$

Alors $|\Sigma| = \frac{n(n-1)}{2}$.

Pour $P = \{i,j\}$ avec $i<j$, on définit pour $\sigma \in S_n$

$$\begin{aligned} i_\sigma(P) &= 1 \quad \text{si } \sigma(i) < \sigma(j) \\ &= -1 \quad \text{si } \sigma(i) > \sigma(j). \end{aligned}$$

et on définit $\boxed{\varepsilon(\sigma) = \prod_{P\in\Sigma} i_\sigma(P) \in \{\pm 1\}}$

<u>Rem</u>: $\varepsilon(\sigma)$ est la parité du nombre d'inversions faite par la permutation σ.

On va vérifier que ε définit un homomorphismes de groupes avec les propriétés demandées.

- <u>homomorphisme de groupe</u>.

  Soit $\sigma, \sigma' \in S_n$. On note $P = \{i, j\}$ avec $i<j$

  et $\sigma'(P) = \{\sigma'(i), \sigma'(j)\}$.

  Alors $i_{\sigma\circ\sigma'}(P) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} i_{\sigma'}(P) = -1 \text{ et } i_\sigma(\sigma'(P)) = 1 \\ \text{ou} \\ i_{\sigma'}(P) = 1 \text{ et } i_\sigma(\sigma'(P)) = -1 \end{cases}$

  De même pour $i_{\sigma\circ\sigma'}(P) = 1 \Leftrightarrow \cdots$

  On a donc la formule $\forall \sigma, \sigma' \in S_n$, $\forall P \in \Sigma$

$$i_{\sigma\circ\sigma'}(P) = i_{\sigma'}(P) \cdot i_\sigma(\sigma'(P)).$$

  En prenant le produit sur $P\in\Sigma$, on obtient

$$\varepsilon(\sigma\circ\sigma') = \prod_{P\in\Sigma} i_{\sigma\circ\sigma'}(P) = \prod_{P\in\Sigma} i_{\sigma'}(P) \cdot \prod_{P\in\Sigma} i_\sigma(\sigma'(P)).$$

or l'application $P \mapsto \sigma'(P)$ est une bijection de Σ dans Σ.

donc

$$\prod_{P\in\Sigma} i_\sigma(\sigma'(P)) = \prod_{P\in\Sigma} i_\sigma(P).$$

on obtient donc $\varepsilon(\sigma\circ\sigma') = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\sigma')$.

- $\varepsilon(\tau) = -1$, si τ = transposition.

on note $\tau = (a\ b)$ avec $a < b$

alors $i_\tau(P) = -1 \iff \begin{cases} P = \{a, b\} \\ P = \{a, j\} \text{ avec } a < j < b. \\ P = \{i, b\} \text{ avec } a < i < b. \end{cases}$

Il y a donc $1 + 2(b-a-1)$ sous-ensembles $P \in \Sigma$ tel que $i_\tau(P) = -1$. Donc $\varepsilon(P) = -1$, car $1+2(b-a-1)$ est impair.

- $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$, si σ = cycle de longueur k.

D'après la proposition précédent σ = produit de $(k-1)$ transpositions et on sait que ε est un homomorphisme de groupes.

Définitions ① Soit $\sigma \in S_n$, ~~si $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$~~, on dit que σ est une permutation paire, si $\varepsilon(\sigma) = 1$
impaire, si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

② On note $A_n = \ker(\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\})$ le noyau de la signature.

A_n est appelé le groupe alterné (à n lettres).

$|A_n| = \dfrac{n!}{2}$.