Groupes

Exercice 1. *Pour chacune de ces opérations, étudier l'associativité, la commutativité, l'existence de l'élément neutre, l'existence du symétrique :*

1. *On définit sur* $\mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto m + 2n$.
2. *On définit sur* $\mathbb{N}^*$, $(m,n) \mapsto pgcd(m,n)$.
3. *On définit sur* $\mathbb{N}^*$, $(m,n) \mapsto ppcm(m,n)$.
4. *Soit* X *un ensemble. On définit sur* $\mathcal{P}(X)$, $(A,B) \mapsto A \cap B$.
5. *Soit* X *un ensemble. On définit sur* $\mathcal{P}(X)$, $(A,B) \mapsto A \cup B$.
6. *Soit* X *un ensemble. On définit sur* $\mathcal{P}(X)$, $(A,B) \mapsto A \setminus B$.
7. *Soit* X *un ensemble. On définit sur l'ensemble des applications* $\mathcal{A}(X,X)$, $(f,g) \mapsto f \circ g$.
8. *Soit* $\mathcal{M}$ *l'ensemble des matrices carrées de taille* 2 *et à coefficients dans* $\mathbb{Z}$. *Pour* $(A,B) \mapsto A \times B$.

Exercice 2. *Dire pour quelle(s) raison(s) les opérations* $\star$ *suivantes ne munissent pas les ensembles* G *donnés d'une structure de groupe ?*

(a) $G = \mathbb{N}$, $\star =$ *l'addition des nombres ;*

(b) $G = \mathbb{N}^*$, $\star =$ *la multiplication des nombres ;*

(c) $G = \mathbb{R}$, $\star =$ *la multiplication des nombres ;*

Exercice 3. *Pour* $n = 6, 7, 8$ *:*

1. *Dresser les tableaux d'addition et de multiplication dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. *Déterminer l'opposé de chaque élément de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +$.
3. *Préciser les inverses des éléments inversibles.*

Exercice 4. *Soit* ABC *un triangle équilatéral du plan. Déterminer l'ensemble des rotations qui laissent invariant le triangle. Montrer que c'est un groupe pour la loi* $\circ$.

Exercice 5. *Les ensembles suivants, pour les lois considérées, sont-ils des groupes ?*

1. $]-1,1[$ *muni de la loi définie par* $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ *;*
2. $\mathbb{R}$ *muni de la loi de composition définie par* $x * y = x + y - xy$.

Exercice 6. *L'ensemble des bijections d'un ensemble* E *sur lui même et noté* $\mathcal{B}(E)$.

1. *Montrer que* $\mathcal{B}(E)$ *muni de la composition est un groupe.*
2. *Si* E *est fini et son cardinal est* n*, on note* $\mathcal{B}(E)$ *par* $\mathfrak{S}_n$*, et on l'appelle le groupe des permutations à* n *éléments. Quel est le cardinal de* $\mathfrak{S}_n$ *?*
3. *Déterminer* $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ *et* $\mathfrak{S}_4$.
4. *Est-ce que le groupe* $\mathfrak{S}_n$ *est commutatif ?*

Exercice 7.

1. *Décomposer la permutation suivante dans* $\mathcal{S}_4$ *en cycles disjoints :*

$$(1423)(23)(143).$$

2. *Décomposer la permutation suivante dans* $\mathcal{S}_6$ *en cycles disjoints :*

$$(15)(234)(51)(12345)(423)(135).$$

Exercice 8.

1. *Vérifier que*

$$(a_1\, a_2 \cdots a_n) = (a_1\, a_n)(a_1\, a_{n-1}) \cdots (a_1\, a_2).$$

En déduire que les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$.

2. *Vérifier que*

$$(a_i\, a_j) = (1\, a_i)(1\, a_j)(1\, a_i).$$

En déduire que les transpositions $(1\,2), \ldots, (1\,n)$ *engendrent* $\mathcal{S}_n$.

Exercice 9. *Soit* $G, *$ *un groupe et* $H \subset G, H \neq \emptyset$*. Montrer :*

$$\begin{gathered} H \text{ est un sous-groupe de } G \\ \Updownarrow \\ \forall x, y \in H : x * y^{-1} \in H. \end{gathered}$$

Exercice 10. *On considère la structure additive de* $\mathbb{Z}$.

1. *Soit* $n \in \mathbb{Z}$*. Montrer que* $n\mathbb{Z}$ *est un sous-groupe de* $\mathbb{Z}$.
2. *Y a-t-il d'autres sous-groupes de* $\mathbb{Z}$ *?*

Exercice 11. *Montrer que si* H *et* K *sont des sous-groupes de* G *alors* $H \cap K$ *est un sous-groupe de* G.

Exercice 12. *Soit* G *un groupe,* H *et* K *deux sous-groupes de* G*. Montrer que* $H \cup K$ *est un sous-groupe de* G *si et seulement si* $H \subset K$ *ou* $K \subset H$.

Exercice 13. *Si G est un groupe, on appelle centre de G et on note $Z(G)$ l'ensemble $\{x \in G \mid \forall y \in G, xy = yx\}$.*

1. *Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.*
2. *Montrer que G est commutatif ssi $Z(G) = G$.*
3. *Calculer $Z(\mathfrak{S}_3)$.*

Exercice 14. *Soient $(G, \star)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\cdot$ par $(x, y) \cdot (x', y') = (x \star x', y \triangle y')$. Montrer que $(G \times H, \cdot)$ est un groupe.*

Exercice 15. *Donner les éléments du sous-groupe $< \overline{5} >$ dans $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, +$. Quel est l'ordre du sous-groupe $< \overline{5} >$?*

Exercice 16. *On pose $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$. On considère les deux matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Démontrer que A et B sont d'ordres finis mais que AB est d'ordre infini.

Exercice 17. *Soit G un groupe commutatif. Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de G forme un sous-groupe de G.*

Exercice 18. *Est-ce que les groupes suivants sont cycliques ? Si oui, donner un générateur. Sinon, démontrer qu'il n'existe pas de générateur pour ce groupe.*

1. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +$
2. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +$
3. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +$
4. $\mathbb{Q}, +$

Exercice 19. *Soient $G, *$ un groupe et H un sous-groupe de G.*

1. *Soit $a \in G$. Montrer qu'il y a une bijection entre H et $aH = \{a * h \mid h \in H\}$.*
2. *On définit une relation $\mathcal{R}$ sur G : $a\mathcal{R}b$ si $aH = bH$. Est-elle une relation d'équivalence ? Si oui, quelle est la classe d'équivalence de $a \in G$?*
3. *Si card(G) est fini, montrer que card(H) divise card(G).*
4. *Si card(G) est fini, montrer que l'ordre de chaque élément de G divise card(G).*

Exercice 20.

1. *Soient* $G = \mathbb{Z}, +$ *et* $H = 6\mathbb{Z}$ *un sous-groupe de* G*. Déterminer les classes à gauche (resp. à droite) de* G *suivant* H*.*
2. *Même question pour* $G = \mathfrak{S}_3, \circ$ *et* $H = \{(12), id\}$*.*
3. *Même question pour* $G = \mathfrak{S}_3, \circ$ *et* $H = \{(123), (132), id\}$*.*

Exercice 21.

1. *Donner l'ordre de chaque élément de* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +$*. Donner tous les sous-groupes de* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +$*.*
2. *Même question pour* $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +$*.*
3. *Donner les générateurs de* $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +$*.*

Exercice 22. *Déterminer tous les sous-groupes du groupe symétrique* S_3*.*

Exercice 23. *Soit* G *un groupe dont l'ordre est un nombre premier. Montrer que* G *est un groupe cyclique.*

Exercice 24. *Soit* $(G, \star)$ *un groupe. Montrer que si pour tout* $x \in G$*,* $x^2 = e$*, alors* G *est abélien.*

Exercice 25. *Montrer que l'application*

$$sgn : \mathbb{R}^* \longrightarrow \{1, -1\}$$

telle que $sgn(x) = 1$ *si* $x > 0$ *et* $sgn(x) = -1$ *si* $x < 0$*, est un morphisme de groupes.*

Exercice 26. *Vrai ou faux ? Clarifier votre réponse.*

1. *Soit* $f : G_1 \longrightarrow G_2$ *un morphisme de groupes. Si* H *est un sous-groupe de* G_1*, alors* $f(H)$ *est un sous-groupe de* G_2*.*
2. *Soit* $f : G_1 \longrightarrow G_2$ *un morphisme de groupes. Si* H *est un sous-groupe de* G_2*, alors* $f^{-1}(H)$ *est un sous-groupe de* G_1*.*

Exercice 27. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Soient* $G, *$ *et* $H, \triangle$ *des groupes et* $f : G, * \longrightarrow H, \triangle$ *un homomorphisme de groupes. Montrer :*

1. $\forall g \in G$*, si* $o(g) = n$*, alors* $o(f(g)) \mid n$*.*
2. *Si* f *est injectif, alors* $\forall g \in G$*,* $o(g) = o(f(g))$*.*

Exercice 28. *Soient* $G, *$ *et* $H, \triangle$ *des groupes isomorphes. Montrer :*

1. $G, *$ *commutatif ssi* $H, \triangle$ *commutatif.*
2. $|G| = |H|$*, si* G *est fini.*
3. $\forall n, r \in N$ *:* $G, *$ *a exactement* r *éléments d'ordre* n *ssi* $H, \triangle$ *a exactement* r *éléments d'ordre* n*.*

Exercice 29. *Montrer qu'un groupe cyclique d'ordre* $k \in \mathbb{N}^*$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +$.

Exercice 30. *Est-ce que les groupes suivants sont isomorphes ?*

1. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +$ *et* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +$
2. $\{1, -1, i, -i\}, \cdot$ *et* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +$
3. $\mathfrak{S}_3, \circ$ *et* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +$.

Exercice 31. *Déterminer, à isomorphisme près, les groupes d'ordre inférieur ou égal à* 5.

Exercice 32. *Soit* $f : G_1, * \longrightarrow G_2, \triangle$ *un morphisme de groupes.*

1. *Montrer que* f *est injectif si et seulement si* $Ker(f) = \{e_{G_1}\}$.
2. *Si* f *est un isomorphisme, montrer que son inverse* f^{-1} *est aussi un morphisme de groupes.*
3. *Soit* $y \in Im(f)$. *Si* $x \in f^{-1}(y)$, *montrer que* $f^{-1}(y) = x * Ker(f)$.
4. *Supposons que* G_1 *est fini. Montrer que* $|G_1| = |Ker(f)| \cdot |Im(f)|$.

Exercice 33. *Soit* G *un groupe. Montrer que l'application* $x \mapsto x^{-1}$ *est un morphisme si et seulement si* G *est commutatif.*

Exercice 34. *Décrire tous les homomorphismes de groupes de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{Z}$. *Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.*

Exercice 35.

1. *Montrer que le cercle* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *est un sous-groupe de* $\mathbb{C}^*$.
2. *Montrer que l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

   est un isomorphisme de groupes et déterminer son inverse.

Exercice 36. *Soit* d *un diviseur de* n. *Montrer que le morphisme* de réduction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ x \mod n = [x]_n & \mapsto & x \mod d = [x]_d \end{array}$$

est bien défini et surjectif. Quel est son noyau ?

Exercice 37. *Soient* G *un groupe et* H *un sous-groupe de* G. *Soit* $g \in G$.

1. *Montrer que* $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ *est un sous-groupe de* G.
2. *Montrer qu'il existe une bijection entre* H *et* gHg^{-1}.