Divisibilité, congruences, équations diophantiennes

Exercice 1. *Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par* 4*. Réciproquement, un multiple de* 4 *est-il somme de deux entiers impairs ?*

Exercice 2. *Montrer que les nombres de trois chiffres dont le deuxième chiffre vaut la somme des deux autres sont des multiples de* 11*.*

Exercice 3. *Soit* $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $9 \mid a^3 + b^3 + c^3$*. En écrivant la division euclidienne de* a, b *et* c *par* 3*, montrer que* 3 *divise* a, b *ou* c*.*

Exercice 4. *Déterminer les triplets* $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ *tels que*

$$\text{(i) ppcm}(a, b) = 42, \qquad \text{(ii) pgcd}(a, c) = 3, \qquad \text{(iii) } a + b + c = 29.$$

Exercice 5. *Soient* a, b *et* c *des entiers relatifs. Montrer que*

$$\text{pgcd}(a, b, c) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c).$$

Exercice 6. *Démontrer que le pgcd de deux entiers naturels consécutifs non nuls vaut* 1*.*

Exercice 7. *Soient* a *et* b *deux entiers dont le pgcd est* δ*. Quel est le pgcd de* a/δ *et* b/δ *?*

Exercice 8. *Soient* $x = a/b$ *et* $y = c/d$ *des nombres rationnels donnés sous forme irréductible et tels que* $x + y$ *soit un entier. Démontrer que* x *et* y *ont même dénominateur.*

Exercice 9. *Soit* $P = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n$ *un polynôme à coefficients entiers. Montrer qu'une racine rationnelle de* P *est nécessairement entière.*

Exercice 10. *Est-il vrai que* $\text{pgcd}(a, b) = d$ *si, et seulement si, il existe* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $ax + by = d$ *?*

Exercice 11. *Si* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *vérifie* $ax + by = \text{pgcd}(a, b)$*, que peut-on dire du* $\text{pgcd}(x, y)$ *?*

Exercice 12. *En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le pgcd de*

1. 853 *et* 212
2. 385 *et* 330
3. 1395 *et* 1054

Exercice 13. *Existe-t-il des points de la droite d'équation* $87x+31y-2=0$ *dont les coordonnées sont des entiers naturels.*

Exercice 14 (ME, Problème 99)**.** *Le maire de Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne) a décidé de quitter la zone euro et de faire utiliser aux habitants de Saint-Tricotin leur propre monnaie : la maille. Pour éviter de frapper trop de sortes de pièces, deux types de pièces seulement seront disponibles, l'une de 9 mailles, l'autre de 11 mailles. Au début de l'opération, les commerçants n'ont pas de pièces pour rendre la monnaie et les acheteurs doivent faire l'appoint. Faire la liste des sommes* $\leqslant 30$ *mailles que l'on peut payer. Peut-on payer les sommes suivantes (en mailles) :* $41, 53, 71, 79$ *? Montrer qu'on peut payer n'importe quelle somme* $c \geqslant 99$ *mailles (on suppose que l'acheteur a à sa disposition autant de pièces qu'il veut).*

Exercice 15. *(Exemples d'équations diophantiennes linéaires) Résoudre dans* $\mathbb{Z}$ *les équations suivantes*

1. $3x-4y=1$
2. $7x-9y=2$
3. $29x+24y=3$

Exercice 16. *Déterminer toutes les solutions entières de*

$$42x+150y=18.$$

Exercice 17.

1. *Déterminer toutes les solutions entières de*
$$6u+5z=10.$$
2. *Idem pour*
$$4x+5y=u.$$
3. *Donner maintenant les solutions de*
$$24x+30y+5z=10.$$

Exercice 18. *Calculer pgcd*$(105, 294)$*, puis* $d=$*pgcd*$(105, 294, 770)$*. Trouver des entiers* u, v *et* w *tels que* $195u+294v+770w=d$*.*

Exercice 19. *Résoudre dans* $\mathbb{Z}$ *les équations*

1. $x^2 - y^2 = 15$
2. $x^2 - y^2 = 24$

Exercice 20. *Résoudre* $n^3 - m^3 = 999$ *dans* $\mathbb{N}$.

Exercice 21. *Montrer que* $5^n + 19$ *est toujours divisible par* 4 *si* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22. *Soient* $a, b, n \in \mathbb{Z}$. *Montrer que*

$$\begin{array}{ccc} a \text{ mod } n & = & b \text{ mod } n \\ & \Updownarrow & \\ & n \mid a - b. & \end{array}$$

Exercice 23.

1. *Soit* n *un entier relatif. On note* $s(n)$ *la somme des chiffres de* n *(en base* 10*). Montrer que* $n \equiv s(n)$ *mod* 9.
2. *** Soit* a *la somme des chiffres de* 4444^{4444} *(écrit en base* 10*) et* b *la somme des chiffres de* a*. Que vaut* c*, la somme des chiffres de* b *?*

Exercice 24.

1. *Montrer que* $x^2 = 2^n - 1$ *n'a pas de solution entière si* $n > 1$.
2. *Existe-t-il des entiers naturels* y *et* n *tels que* $y^2 = 2^n + 1$ *? Trouver toutes les solutions.*

Exercice 25. *(Théorème de Liouville) Soit* $p > 5$ *un entier. On considère l'équation en* $m \in \mathbb{N}^*$

$$(p-1)! + 1 = p^m. \tag{1}$$

1. *Déterminer la parité de* p.
2. *Montrer que* $(p-1)^2$ *divise* $(p-1)!$.
3. *En déduire que* $(p-1)$ *divise* $1 + p + \ldots + p^{m-1}$.
4. *Réduire* $1 + p + \ldots + p^{m-1}$ *modulo* $p - 1$ *pour obtenir que* $(p-1)$ *divise* m.
5. *Conclure que l'équation* (1) *n'a pas de solution.*

Exercice 26. *(Exemple d'équations diophantiennes - méthode réduction modulo* n*) Soit* n *un entier relatif. Calculer le reste de la division euclidienne de* n^2 *par* 4 *suivant que cet entier est pair ou impair. Existe-t-il des entiers* a *et* b *tels que* $a^2 + b^2 = 8123$ *?*

> $\triangle$ Le théorème des deux carrés dit qu'un entier est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k + 3$ intervient à une puissance paire.
>
> $\triangle$ Un entier naturel n est la somme de trois carrés si et seulement si n n'est pas de la forme $n = 4m(8k + 7)$.

$\triangle$ Tout entier naturel est la somme de quatre carrés (Lagrange).

Exercice 27. *Montrer que les équations suivantes n'ont pas de solutions entières.*

1. $3x^2 + 2 = y^2$.
2. $x^2 + y^2 = 2004$.

Exercice 28. *(Exemple d'équations diophantiennes - méthode de la descente infinie)*

1. *Résoudre dans* $\mathbb{Z}$ *l'équation* $x^2 - 2y^2 = 0$. *Qu'en déduit-on sur* $\sqrt{2}$ *?*
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers* (a_n, b_n) *tel que* $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
3. *Montrer que* a_n *et* b_n *sont premiers entre eux.*
   Indication : montrer que pgcd(a_{n+1}, b_{n+1}) =*pgcd*(a_n, b_n).

Exercice 29.

1. *Montrer que* $\sqrt{3}$ *et* $\sqrt{6}$ *sont des nombres irrationnels.*
2. *Montrer que plus généralement, si* $a \in \mathbb{N}$ *et* $n \geqslant 2$, *alors* $\sqrt[n]{a}$ *est un nombre rationnel (en fait un entier) si, et seulement si,* a *est une puissance* n *ième d'un entier.*
3. *Soit* $n \geqslant 2$. *Le nombre* $\sqrt[n]{n}$ *peut-il être rationnel ?*

Exercice 30. *Déterminer les entiers naturels* n *tels que* $n + 1 \mid n^2 + 1$.

Exercice 31. *Calculer le pgcd de* $12n^2 + 16n + 5$ *et* $6n + 5$.

Exercice 32. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Déterminer pgcd*$(5n + 2, 7n + 3)$.
2. *La fraction rationnelle* $\frac{11n+3}{4n+1}$ *est-elle irréductible ?*

Exercice 33. *Enoncer et prouver un test de divisibilité par* 11.

Exercice 34. *Soit* j *votre jour de naissance et* m *votre mois de naissance.*

1. *Calculer* $a = 31j + 12m$.
2. *Réciproquement, en n'utilisant que* a, *retrouvez votre date de naissance.*

Référence : [ME] PERRIN Daniel, Mathématiques d'Ecole, Cassini (2011) (deuxième édition).