Examen du 6 mai 2019

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 - (10 points) **QCM.** Une seule réponse parmi les 5 choix possibles (A,B,C,D ou E) est correcte. Il suffit d'indiquer la lettre pour chaque question ; aucun argument/justification/calcul n'est demandé.

Barème : réponse correcte +1 point, réponse fausse -0,5 point.

1. Le nombre de générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}, +)$ est

   A : 1 B : 12 C : 32 D : 119 E : 120

2. Le nombre de sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ contenant la classe $\overline{4}$ est

   A : 0 B : 1 C : 2 D : 3 E : 4

3. Le nombre d'éléments d'ordre 2 du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est

   A : 0 B : 1 C : 2 D : 3 E : ∞

4. L'ordre de la classe $\overline{2}$ dans le groupe $((\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*, .)$ est

   A : 2 B : 4 C : 8 D : 16 E : 17

5. Le nombre d'éléments du corps fini $\mathbb{F}_{81}$ vérifiant l'équation $x^{10} - 1 = 0$ est égal à

   A : 0 B : 1 C : 10 D : 80 E : 81

6. On considère l'homomorphisme de groupe $f : \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ défini par $f(\overline{x}) = \overline{4} \cdot \overline{x}$. Alors l'ordre de l'image $\mathrm{im}(f)$ est égal à

   A : 0 B : 2 C : 4 D : 7 E : 28

7. Soient p, q, r trois nombres premiers vérifiant $p < q < r$. Le nombre de diviseurs du produit pqr qui sont $> p^2$ est

   A : 1 B : 3 C : 4 D : 8 E : ce nombre dépend de p, q, r

8. Le reste de la division euclidienne par 13 de $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 3 \cdot 2$ est

   A : 0 B : 1 C : 2 D : 6 E : 12

   On considère le corps fini $K = \mathbb{F}_2[X]/X^3 + X + 1$ et on note $\alpha \in K$ la classe résiduelle du polynôme $X \in \mathbb{F}_2[X]$.

9. L'inverse de α dans le groupe multiplicatif $(K^*, .)$ est

   A : α B : $-\alpha$ C : $\alpha + 1$ D : $\alpha^2 + 1$ E : α n'admet pas d'inverse

10. L'ordre de α dans le groupe multiplicatif $(K^*, .)$ est

A : 1 B : 2 C : 3 D : 7 E : 8

Exercice 2 - (5 points)

1. Montrer que le polynôme $f(X) = X^4 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
2. Combien d'éléments a le corps fini $\mathbb{F}_2[X]/(f)$?
3. Calculer l'inverse de $\overline{X}$ dans K^*.

Exercice 3 - (5 points) On considère le polynôme $P_a = X^2 + aX + 1 \in \mathbb{R}[X]$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le polynôme P_a est-il irréductible dans l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[X]$?
2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(P_a)$ est-il un corps ?
3. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la classe $\overline{X} \in \mathbb{R}[X]/(P_a)$ est-elle inversible ?