

Examen du 1 avril 2019

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 - (3 points) Démontrer que pour tout entier n l'entier $n^7 - n$ est divisible par 42.

Exercice 2 - (4 points) Résoudre les deux systèmes de congruences

1. $5x \equiv 2 \pmod{6}$ et $3x \equiv 1 \pmod{5}$.
2. $2x \equiv 1 \pmod{3}$ et $x \equiv 4 \pmod{6}$.

Exercice 3 - (5 points) Déterminer si les classes résiduelles suivantes sont inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$. Si oui, calculer leur inverse.

1. $\overline{11}$
2. $\overline{12}$
3. $\overline{13}$

Exercice 4 - (6 points)

1. Calculer l'inverse de la classe résiduelle $\overline{19}$ dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.
2. En déduire la classe résiduelle $\overline{19}^{19}$ dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.
3. En utilisant le calcul précédent, déterminer les deux derniers chiffres de 2019^{2019} .

Exercice 5 - (2 points) Déterminer l'ordre de la classe résiduelle $\overline{3}$ dans le groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^*$.