Examen du 23 mai 2018

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1. (10 points) **QCM.** Une seule réponse parmi les 5 choix possibles (A,B,C,D ou E) est correcte. Il suffit d'indiquer la lettre pour chaque question ; aucun argument/ justification/calcul n'est demandé.

Barème : réponse correcte +1 point, réponse fausse : -0,5 point.

1. Parmi les 5 sous-ensembles suivants de $((\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*, .)$ lequel n'est pas un sous-groupe ?

   A : $\{\overline{1}\}$ B : $\{\overline{1}, \overline{3}\}$ C : $\{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}\}$ D : $\{\overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}\}$ E : $\{\overline{999}, \overline{1001}\}$

2. Le théorème des restes chinois affirme qu'on a un isomorphisme d'anneaux

   $$\Phi : (\mathbb{Z}/1001\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}).$$

   L'image $\Phi(\overline{2018})$ est égale à

   A : $(\overline{3}, \overline{6}, \overline{4})$ B : $(\overline{2}, \overline{5}, \overline{3})$ C : $(\overline{1}, \overline{5}, \overline{4})$ D : $(\overline{2}, \overline{0}, \overline{18})$ E : $(\overline{20}, \overline{1}, \overline{8})$

3. On considère l'anneau $A = \mathbb{F}_5[X]/(X^2 - \overline{3}X + \overline{2})$ et on note x la classe de X dans A. Alors l'élément $x + \overline{4}$ est
   — A : un diviseur de zéro.
   — B : l'unité de l'anneau A.
   — C : inversible d'inverse $x - \overline{4}$.
   — D : inversible d'inverse $x - \overline{2}$.
   — E : une solution de l'équation $y^2 = 1$ dans A.

4. On considère le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1 \in K[X]$, où K est un corps. Alors $P(X)$ est irréductible dans $K[X]$ si K est égal à

   A : $\mathbb{R}$ B : $\mathbb{C}$ C : $\mathbb{F}_2$ D : $\mathbb{F}_3$ E : $\mathbb{F}_{11}$

5. Le nombre d'éléments du corps fini $\mathbb{F}_{125}$ vérifiant l'équation $x^2 - 1 = 0$ est égal à

   A : 1 B : 2 C : 62 D : 63 E : 124

6. L'ordre de la classe $\overline{3}$ dans le groupe $((\mathbb{Z}/19\mathbb{Z})^*, .)$ est

   A : 2 B : 3 C : 6 D : 18 E : 19

7. On considère le corps fini $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$ et l'homomorphisme de groupes $f : \mathbb{F}_{16} \to \mathbb{F}_{16}$ défini par $f(\alpha) = \alpha \cdot x^2$ pour tout élément $\alpha \in \mathbb{F}_{16}$. Ici x est la classe de X dans $\mathbb{F}_{16}$ et $\cdot$ est la multiplication dans $\mathbb{F}_{16}$. Alors l'ordre de l'image de f est égal à

   A : 1 B : 2 C : 8 D : 15 E : 16

8. On considère le corps fini $\mathbb{F}_{49} = \mathbb{F}_7[X]/(X^2+1)$. On note x la classe de X dans $\mathbb{F}_{49}$. Alors l'inverse multiplicatif de $\overline{2}x + \overline{1}$ dans $\mathbb{F}_{49}$ est égal à

$$\text{A} : x + \overline{3} \quad \text{B} : x + \overline{4} \quad \text{C} : \overline{2}x - \overline{3} \quad \text{D} : \overline{5}x + \overline{4} \quad \text{E} : \overline{5}x + \overline{6}$$

9. Le nombre $2^{1001} + 1$ est
   — A : premier.
   — B : divisible par 5.
   — C : divisible par 7.
   — D : divisible par $2^{13} + 1$.
   — E : divisible par $2^{1000} + 1$.

10. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes en une variable X à coefficients réels. On considère le sous-ensemble, noté $\mathbb{R}[X^2]$, des polynômes $P(X)$ qui s'écrivent $P(X) = Q(X^2)$ pour un certain polynôme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$. Alors
   — A : $\mathbb{R}[X^2]$ est un idéal de $\mathbb{R}[X]$.
   — B : $\mathbb{R}[X^2]$ est un espace vectoriel de dimension 2.
   — C : $\mathbb{R}[X^2]$ est un corps.
   — D : $(1+X)^2 \in \mathbb{R}[X^2]$.
   — E : $\mathbb{R}[X^2]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. (4 points) Déterminer toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de l'équation

$$11x + 8y = 89.$$

Exercice 3. (6 points) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit deux entiers positifs a_n et b_n par la formule

$$(1+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}b_n.$$

On considère $d_n = PGCD(a_n, b_n)$ pour tout $n \geq 0$.

1. Calculer d_0, d_1, d_2 et d_3.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_{n-1} et b_{n-1}.
4. En utilisant la formule établie en (3), calculer d_{n+1} en fonction de d_{n-1}.
5. En déduire une formule donnant d_n en fonction de n. On distinguera les deux cas correspondants à la parité de n.