

Examen du 18 mai 2017

Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 Soit n un nombre entier positif. Montrer que \bar{a} est inversible dans l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \cdot$ si et seulement si les entiers a et n sont premiers entre eux.

Exercice 2 On pose $N = \frac{3^{77}-1}{2}$.

- Calculer $3^{77} \bmod 4$.
- En déduire que N est impair.
- Montrer que $a - b$ est un diviseur de $a^n - b^n$ pour tous les entiers a, b et pour tout entier positif n .
- En déduire que N n'est pas un nombre premier.

Exercice 3 Soient n un nombre entier positif et d un diviseur de n .

- Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, + &\longrightarrow \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}, + : \\ [x]_n &\longmapsto [x]_d, \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes bien défini, où $[x]_n$ désigne la classe de x dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +$ et $[x]_d$ désigne la classe de x dans $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}, +$.

- Déterminer l'image de φ .
- Calculer le noyau de φ .

Exercice 4

- Calculer le reste de la division euclidienne de 2017^{2021} par 25.
- Quels sont les deux derniers chiffres de 2017^{2021} .

Exercice 5 On considère l'anneau $A = \mathbf{F}_3[x]/(2x^2 + x + 1)$.

- Enumérer ses éléments.
- Calculer dans l'anneau A le produit des classes de $2x^2$ et $2x$ et en donner le représentant de degré minimal.
- Est-ce que l'anneau A est un corps ?

FIN DU SUJET