

Examen du 14 mars 2016

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 - Démontrer que pour tout entier n l'entier $n^{13} - n$ est divisible par 91.

Exercice 2 - Résoudre les deux systèmes de congruences

1. $5x \equiv 2 \pmod{6}$ et $3x \equiv 1 \pmod{5}$.
2. $2x \equiv 1 \pmod{3}$ et $x \equiv 4 \pmod{6}$.

Exercice 3 - Déterminer si les classes résiduelles suivantes sont inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/63\mathbb{Z}$. Si oui, calculer leur inverse.

1. $\overline{12}$
2. $\overline{13}$
3. $\overline{14}$
4. $\overline{15}$

Exercice 4 - Calculer les deux derniers chiffres de 2016^{2002} .

Exercice 5 - Soit p un nombre premier et soit q un nombre premier divisant $2^p - 1$.

1. Montrer que la classe résiduelle $\overline{2}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
2. Donner l'ordre du groupe des inversibles $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.
3. Déterminer l'ordre de $\overline{2}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.
4. Montrer que p divise $q - 1$.
5. **BONUS** : Dédurre du résultat précédent une preuve du fait qu'il existe un nombre infini de nombres premiers.