

TP MAM5 Discrétisation Volume Fini des EDPs : équation de Buckley Leverett

On considère $V_T > 0$ et la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

$$f(s) = V_T \frac{s^2}{s^2 + \frac{(1-s)^2}{\mu}}.$$

L'équation de Buckley Leverett décrit l'injection d'eau en $x = 0$ dans un réservoir d'huile unidimensionnel $\Omega = (0, L)$. L'inconnue $s(x, t)$ est la fraction volumique d'eau dans le réservoir et $1 - s(x, t)$ est la fraction volumique d'huile.

$$\begin{cases} \partial_t s(x, t) + \partial_x f(s(x, t)) = 0, & x \in \Omega, t \in (0, t_f), \\ s(0, t) = 1, & t \in (0, t_f), \\ s(x, 0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

On considère une discrétisation uniforme de l'intervalle Ω avec $N + 1$ points $x_{i+1/2} = ih$, $i = 0, \dots, N$ avec $h = L/N$. Avec les notations du cours, la discrétisation volume fini de l'intervalle Ω est définie par l'ensemble des N mailles $\kappa_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ avec $i = 1, \dots, N$. Notez que $h_i = |x_{i+1/2} - x_{i-1/2}| = h$ pour $i = 1, \dots, N$.

On discrétise l'intervalle de temps $[0, t_f]$ de façon uniforme par

$$t^0 = 0, t^n = n\Delta t, n = 1, \dots, N_{\Delta t}$$

où $\Delta t = \frac{t_f}{N_{\Delta t}}$.

- (1) Ecrire la discrétisation Volume Fini de l'équation de Buckley Leverett avec le schéma de Godunov pour le flux numérique et un schéma d'Euler explicite ou implicite pour l'intégration en temps. On introduira la fonction de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N suivante :

$$F(S) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} f(1) - f(S_1) \\ f(S_1) - f(S_2) \\ \vdots \\ f(S_{N-1}) - f(S_N) \end{pmatrix}$$

- (2) Calculez le pas de temps de CFL 1 du schéma d'Euler explicite. En déduire une valeur de $N_{\Delta t}$ pour le schéma explicite.
- (3) Programmez la fonction $F(S)$.
- (4) Programmez la boucle en temps calculant les solutions successives $S^n \in \mathbb{R}^N$ aux temps t^n , $n = 1, \dots, N_{\Delta t}$ connaissant S^0 .
- (5) On choisit le jeu de données : $L = 1000$, $t_f = 3600 \times 24 \times 360 \times 20$ (en secondes soit 20 ans), $\mu = 10$, $V_T = 10^{-6}$. Etudiez le comportement numérique (stabilité, convergence, nombre de pas de temps, temps calcul) du schéma explicite pour différentes valeurs de $N = 10, 100, 400$. Vérifiez l'instabilité du schéma pour les CFL plus grandes que 1.
- (6) Programmez la fonction différentielle $dF(S)$.

- (7) Programmez sous forme de fonction l'algorithme de Newton ci-dessous pour résoudre l'équation $G(y) = 0$ avec

$$G(y) = y - x - \Delta t F(y),$$

pour $x \in \mathbb{R}^N$ donné. Le Newton sera initialisé avec $y = x$. Le critère d'arrêt ϵ sur la norme du résidu relatif est fixé à 10^{-6} , et le nombre d'itérations maximum est fixé à 100. Le paramètre de relaxation ω est fixé à $\omega = 0.1$.

— *Initialisation*

$$\begin{aligned}y &= x \\r &= G(y) ; nr = nr^{(0)} = \|r\|_2 ; \\k &= 0.\end{aligned}$$

— *Tant Que* $\frac{nr}{nr^{(0)}} > \epsilon$ *et* $k \leq 100$ *Faire*

$$\begin{aligned}dy &= -[dG(y)]^{-1}r \\ \alpha &= \min(1, \omega/\|dy\|_\infty) \\ y &= y + \alpha dy \\ r &= G(y) \\ nr &= \|r\|_2 \\ k &= k + 1\end{aligned}$$

— *End Tant Que*

- (8) Programmez le schéma implicite dans la boucle en temps à l'aide de la fonction précédente.
- (9) Comparez le comportement numérique des schémas explicite et implicite.