

Exercice 1 : on considère la matrice symétrique réelle A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère la méthode de la puissance itérée suivante afin de calculer la valeur propre λ_1 de plus grande valeur absolue de A : étant donné

$$q^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on calcule $q^{(k)} \in \mathbb{R}^2$ et $\nu^{(k)} \in \mathbb{R}$ pour tous $k \in \mathbb{N}$, tels que :

$$\begin{cases} q^{(k)} = \frac{Aq^{(k-1)}}{\|Aq^{(k-1)}\|_2}, \\ \nu^{(k)} = (q^{(k)}, Aq^{(k)}). \end{cases}$$

(1) Encadrer les valeurs propres de A en utilisant les cercles de Gershgorin.

Corrigé : Comme la matrice est symétrique, les deux familles de cercles de Gershgorin associés aux lignes et aux colonnes coïncident et les valeurs propres λ de A vérifient pour tous $i = 1, \dots, n$:

$$|\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{i,j}|,$$

soit ici

$$|\lambda - 1| \leq 3,$$

avec de plus $\lambda \in \mathbb{R}$ comme la matrice A est réelle symétrique.

(2) Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A en les ordonnant par ordre décroissant en valeur absolue ainsi que la base orthonormale de vecteurs propres associés notés $u^{(1)}, u^{(2)}$.

Corrigé : Le polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 9$ admet pour racines les valeurs propres $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -2$. L'espace propre associé à chaque valeur propre vérifie $Ax - \lambda_i x = 0$ soit

$$\begin{cases} (1 - \lambda_i)x_1 - 3x_2 = 0, \\ -3x_1 + (1 - \lambda_i)x_2 = 0. \end{cases}$$

On trouve qu'il est engendré par le vecteur propre normalisé $u^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour la

valeur propre λ_1 et par vecteur propre normalisé $u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre

λ_2 . On vérifie que $(u^{(1)}, u^{(2)})$ forme une base orthonormale de \mathbb{R}^2 car la matrice A est réelle symétrique.

(3) Calculer α_1 et α_2 tels que

$$q^{(0)} = \alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)},$$

en déduire l'expression de $A^k q^{(0)}$ en fonction de $u^{(1)}, u^{(2)}$ et λ_1, λ_2 .

Corrigé : comme la base $(u^{(1)}, u^{(2)})$ est orthonormale, on a $\alpha_1 = (q^{(0)}, u^{(1)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\alpha_2 = (q^{(0)}, u^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme $Au^{(1)} = \lambda_1 u^{(1)}$ et $Au^{(2)} = \lambda_2 u^{(2)}$, on déduit que

$$A^k q^{(0)} = \alpha_1 (\lambda_1)^k u^{(1)} + \alpha_2 (\lambda_2)^k u^{(2)}.$$

(4) Montrer par récurrence que $q^{(k)} = \frac{A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|_2}$ pour tous $k \geq 1$.

Corrigé : la relation est vraie pour $k = 1$ par définition de la suite $q^{(k)}$. Supposons la vraie pour $k \geq 1$, alors on a

$$q^{(k+1)} = \frac{Aq^{(k)}}{\|Aq^{(k)}\|_2} = \frac{A}{\|Aq^{(k)}\|_2} \frac{A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|_2} = \frac{\|A^k q^{(0)}\|_2}{\|A.A^k q^{(0)}\|_2} \frac{A.A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|_2} = \frac{A^{k+1} q^{(0)}}{\|A^{k+1} q^{(0)}\|_2}.$$

La propriété est donc vraie pour $k + 1$ et donc pour tous $k \in \mathbb{N}$.

(5) Dédurre des questions 2 et 3 l'expression de $q^{(k)}$ en fonction de $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ et λ_1 , λ_2 , puis calculer les limites de $q^{(k)}$ et de $\nu^{(k)}$ lorsque k tend vers l'infini.

Corrigé : On déduit des deux questions précédentes, en utilisant l'orthonormalité de la base $(u^{(1)}, u^{(2)})$, que

$$q^{(k)} = \frac{\alpha_1 (\lambda_1)^k u^{(1)} + \alpha_2 (\lambda_2)^k u^{(2)}}{\left((\alpha_1)^2 (\lambda_1)^{2k} + (\alpha_2)^2 (\lambda_2)^{2k} \right)^{1/2}} = \frac{\alpha_1 (\lambda_1)^k}{|\alpha_1 (\lambda_1)^k|} \frac{u^{(1)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u^{(2)}}{\left(1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k} \right)^{1/2}}.$$

Comme $\alpha_1 > 0$ et $\lambda_1 > 0$ on note que $\frac{\alpha_1 (\lambda_1)^k}{|\alpha_1 (\lambda_1)^k|} = 1$.

Comme $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| = 1/2 < 1$, on déduit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} q^{(k)} = u^{(1)},$$

puis

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \nu^{(k)} = (u^{(1)}, Au^{(1)}) = \lambda_1.$$

(6) Montrer qu'il existe une constante C indépendante de k telle que

$$|\nu^{(k)} - \lambda_1| \leq C \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2k}.$$

Corrigé : on a d'après l'expression précédente de $q^{(k)}$ et en utilisant l'orthonormalité de la base $(u^{(1)}, u^{(2)})$, que

$$\nu^{(k)} = \frac{\left(\lambda_1 u^{(1)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \lambda_2 u^{(2)}, u^{(1)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u^{(2)} \right)}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k}} = \frac{\lambda_1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k} \lambda_2}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k}}.$$

D'où

$$\nu^{(k)} - \lambda_1 = \frac{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 (\lambda_2 - \lambda_1) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k}}{1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2k}},$$

et donc

$$|\nu^{(k)} - \lambda_1| \leq \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 |\lambda_1 - \lambda_2| \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2k}.$$