Cours L2 Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires et non linéaires

Exercice 1 : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ suivante

$$f(x) = Ax - b,$$

qui admet l'unique zéro $\bar{x} = A^{-1}b$.

Montrer que l'algorithme de Newton appliqué à la fonction f converge vers $\bar{x}$ en une seule itération quelque soit l'initialisation $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 2 : soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

calculer sa décomposition $A = LU$ sans pivotage en détaillant les étapes du calcul. En déduire le déterminant de A et la solution X du système $AX = b$ avec

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dire comment on pourrait déduire la matrice inverse A^{-1} à partir de la décomposition LU de A.

Exercice 3 : Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que $Df(\bar{x})$ est inversible. On considère la méthode de Newton modifiée de la façon suivante : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ et

$$\left({}^t J_k J_k + \lambda I\right)\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) = -\ {}^t J_k f(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N},$$

où $J_k = Df(x^{(k)})$.

(i) Montrer que la matrice $\left({}^t J_k J_k + \lambda I\right)$ est inversible quel que soit $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$. En déduire que la suite $x^{(k)}$ est toujours définie contrairement au cas de l'algorithme de Newton que l'on obtient pour $\lambda = 0$.

(ii) Montrer que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a

$$f(y) - f(x) = \left(\int_0^1 Df((1-t)x + ty)dt\right)(y - x).$$

(iii) Soit la fonction A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A(x) = \int_0^1 Df((1-t)\bar{x} + tx)dt,$$

montrer que

$$(x^{(k+1)} - \bar{x}) = D(x^{(k)})(x^{(k)} - \bar{x}),$$

avec $D(x) = I - \left(\lambda I + ({}^t Df(x))Df(x)\right)^{-1}\ {}^t(Df(x))A(x)$.

(iv) Montrer que $D(\bar{x})$ est une matrice SDP et que $\|D(\bar{x})\|_2 = \rho(D(\bar{x})) < 1$.

(v) En déduire que la suite $x^{(k)}$ converge localement vers $\bar{x}$ au moins à l'ordre 1 au sens où il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 1$ tels que pour tous $x^{(0)} \in B(\bar{x}, \alpha)$ on ait :

1. $\|x^{(k+1)} - \bar{x}\|_2 \leq \beta \|x^{(k)} - \bar{x}\|_2$ pour tous $k \in \mathbb{N}$,
2. $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = \bar{x}$.