Introduction au complexe de de Rham discret

Jérôme Droniou[1]

[1]School of Mathematics, Monash University, Melbourne, Australia, jerome.droniou@monash.edu

September 1, 2022

Les complexes différentiels sont des chaines d'espaces reliés par des opérateurs différentiels, avec la propriété que l'image d'un opérateur est incluse dans le noyau de l'opérateur qui suit. Le plus célèbre complexe est probablement celui de de Rham qui, pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\mathbb{R} \xrightarrow{i_\Omega} \mathrm{H}^1(\Omega) \xrightarrow{\mathbf{grad}} \mathbf{H}(\mathbf{curl};\Omega) \xrightarrow{\mathbf{curl}} \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{L}^2(\Omega) \xrightarrow{0} \{0\},$$

où i_Ω est l'identification de $\mathbb{R}$ avec les fonctions constantes, $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions scalaires sur Ω qui sont, avec leur gradient, de carré integrable, $\mathbf{H}(\mathbf{curl};\Omega)$ (resp. $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$) est l'espace des fonctions vectorielles sur Ω qui sont de carré intégrable et dont le curl (resp. la divergence) est aussi de carré intégrable. La propriété de complexe correspond pour ce complexe aux relations différentielles classiques $\mathbf{grad}\,1 = 0$, $\mathbf{curl}\,\mathbf{grad} = 0$ et $\mathrm{div}\,\mathbf{curl} = 0$, ainsi qu'en la surjectivité de div.

Lorsque Ω a une topologie triviale (connexe, sans tunnel ni vide), ce complexe est de plus *exact*: les inclusions d'image d'un opérateur dans le noyau du suivant deviennent des égalités: $\mathrm{Im}\,i_\Omega = \ker\mathbf{grad} =$, $\mathrm{Im}\,\mathbf{grad} = \ker\mathbf{curl}$, $\mathrm{Im}\,\mathbf{curl} = \ker\mathrm{div}$. Ces relations sont essentielles à l'étude de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) impliquant ces opérateurs différentiels, comme les modèles de magnétostatique ou de Stokes. En particulier, la stabilité et le caractère bien posé de ces systèmes repose sur l'exactitude du complexe, ainsi que des inégalités de Poincaré associées à chaque opérateur.

Ces considérations ont un impact direct sur la stabilité des approximations numériques de ces systèmes; reproduire au niveau discret ces propriétés de complexe exact, et les inégalités associées, est une étape primordiale pour constuire des schémas robustes. Ceci a été bien compris dans le cadre des éléments finis [1]. Ce cadre a cependant des limitations sur le choix des maillages qui manquent de flexibilité pour s'adapter aux situations rencontrées en pratique dans certaines simulations industrielles, ou pour capturer des variations locales fortes dans la solution.

Pour palier à ces limitations, des *complexes polytopaux* ont été concus. Ce sont des versions discrètes de complexes continus qui reproduisent les propriétés clefs de ces objets, et sont applicables sur des maillages fait de polygones ou polyhèdres très généraux. Ces complexes polytopaux permettent la conception de schémas robustes pour les modèles impliquant des opérateurs différentiels plus généraux que le gradient. Les efforts se sont d'abord concus au plus bas degré d'approximation ("Discrete Geometric Analysis" ou "Compatible Discrete Operators" (CDO)), avant de considérer, dans les dernières années, des versions au degré d'approximation arbitraire.

Le propos de ce mini-cours est de présenter la construction et l'analyse d'un de ces complexes discret, le "Discrete De Rham complex" (DDR) [2, 3]. Le cours est organisé en deux blocs de 3 x 1h30 chacun.

Bloc 1: dans cette partie introductrice j'expliquerai en détail pourquoi les propriétés de complexe sont essentielles à la stabilité (caractère bien-posé) d'un modèle de magnetostatique, puis je présenterai la construction de DDR en 2D. Je commencerai par la version de plus bas degré, qui est très étroitement liée aux CW complexes (et aux CDO). Aucune connaissance d'analyse ou d'analyse numérique n'est requise dans ce bloc, qui ne requiert que des bases en algèbre. En particulier, cette section du cours sera aisément accessibles aux collègues travaillant en topologie ou topologie algébrique, et devrait démontrer comment des notions de ces disciplines impactent l'analyse thérique et numérique des EDPs.

Bloc 2: dans cette deuxième partie, je continuerai la construction de DDR en présentant le cadre 3D, et je couvrirai aussi les éléments d'analyse (inégalités de Poincaré, consistance primale et adjointe, etc.) essentielles à l'analyse de schémas numériques basés sur ce complexe discret. Je montrerai comment ces outils permettent la conception de schémas robustes et de haute qualité pour les modèles de magnétostatique et de Stokes; pour ce dernier modèle, nous verrons que DDR permet d'obtenir un schéma robuste par rapport à la pression (sans avoir recours a un crime variationnel).

D'autres sujets plus avancés (réduction de degrés de liberté par serendipité, étude cohomologique du complexe DDR, codage, application à un problème non-linéaire de relativité générale (Yang-Mills), etc.) pourront ensuite être couverts selon l'intérêt et à la demande.

References

[1] D. Arnold. *Finite Element Exterior Calculus*. SIAM, 2018. DOI: 10.1137/1.9781611975543.

[2] D. A. Di Pietro, J. Droniou, and F. Rapetti. "Fully discrete polynomial de Rham sequences of arbitrary degree on polygons and polyhedra". In: *Math. Models Methods Appl. Sci.* 30.9 (2020), pp. 1809–1855. DOI: 10.1142/S0218202520500372.

[3] D. A. Di Pietro and J. Droniou. "An arbitrary-order discrete de Rham complex on polyhedral meshes: Exactness, Poincaré inequalities, and consistency". In: *Found. Comput. Math.* (2021), 80p. DOI: 10.1007/s10208-021-09542-8. URL: https://arxiv.org/abs/2101.04940.