Feuille de TD n°5
Mme Malot
Durée : 1 semaine

REMARQUE 1
En raison de la diversité des parcours au sein de la filière, cette feuille et toutes les suivantes seront organisées de la façon suivante :

- *Une première partie sera commune à tous.*
- *Une seconde partie sera spécifique aux étudiants ayant 3h de TD par semaine.*

1 Partie commune

Exercice 1 :
Soit un jeu de données comportant n observations. Les seules valeurs observées sont $0, 1, 3, 4$ et 5.

1. Compléter le tableau de représentation suivant:

Valeurs	effectif	fréquence	fréquence cumulée
0			0.2
1		0.1	
3	10		0.5
4		0.3	
5			

2. Quelle est la nature de la variable ?
3. Tracer les représentations graphiques adaptées.
4. Donner la moyenne, l'écart type, le coefficient de variation, et le mode.

Exercice 2 :
Soit un jeu de données comportant n observations.

1. Compléter le tableau de représentation suivant:

Classe	effectif	fréquence	fréquence cumulée	hauteur	centre
[0, 1[	10	0.02			
[1, 2[		0.16			
[2, 2.5[			0.42		
				0.44	2.75
				0.18	3.5
[4,5[				0.14	
[5, 10[					

2. Quelle est la nature de la variable ?
3. Donner la moyenne, l'écart type et le coefficient de variation.
4. Tracer les représentations graphiques adaptées.
5. Donner graphiquement, puis numériquement les quartiles.

Exercice 3 :
Soit un jeu de données comportant 500 observations et pour lequel la courbe des fréquences cumulées est donnée par le graphe de la fonction F définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0.2 & \text{si } x \in [1, 2[\\ 0.4 & \text{si } x \in [2, 5[\\ 0.5 & \text{si } x \in [5, 7[\\ 0.75 & \text{si } x \in [7, 9[\\ 0.9 & \text{si } x \in [9, 10[\\ 1 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe des fréquences cumulées.
2. Donner la nature de la variable et déterminer le tableau de représentation associé.
3. Quelle est la moyenne de la variable aléatoire ? Le mode ?

Exercice 4 : Une entreprise a une production constante de 80 unités par mois et doit satisfaire une demande aléatoire qui suit une loi Normale $\mathcal{N}(78, 5)$. (La demande n'est pas nécessairement un entier: penser à une matière première.) Pour satisfaire à une éventuelle demande excédentaire en fin de mois, l'entreprise peut s'approvisionner en début de mois chez un concurrent pour constituer un stock de sécurité.

1. Quelle est la probabilité que, sans approvisionnement supplémentaire, la production ne soit pas suffisante pour faire face à la demande ?
2. Quel doit être le stock de sécurité (éventuellement non entier) pour que la probabilité de défaut face à la demande soit inférieure à 2.5% ?
3. On suppose maintenant que le stock de sécurité ne peut être livré qu'en unité entières. Quel doit être le stock de sécurité (entier) pour que la probabilité de défaut face à la demande soit inférieure à 3% ?

Exercice 5 : Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 10000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés être indépendants les uns des autres.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant donné. Quelle est la loi de X ?
2. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à $2,5\%$. Proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.

Exercice 6 : On lance un dé jusqu' à ce que la somme totale des nombres obtenus dépasse 301. Quelle est la probabilité qu' il faille au moins 81 jets ?

Exercice 7 : Soit X une variable aléatoire d'espérance et de variance toutes deux égales à 20. Montrez que $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 40) \geq 19/20$.

2 Partie spécifique

Exercice 1 :

1. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telle que $\mathbb{E}(X_n) \to_{n\to+\infty} \mu$ et $\text{var} X_n \to_{n\to+\infty} 0$. Montrer que X_n converge vers μ en probabilité.
2. Démontrer le théorème sur la loi des grands nombres telle qu'écrit dans le cours.
3. Soit $(X_n)_n$ la suite de variables aléatoires définie par

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 mais que les conditions de la première question ne sont pas vérifiées.

Exercice 2 : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. Montrer que s'il existe $p > 0$ tel que $\mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) \to_{n\to+\infty} 0$ alors X_n converge vers X en probabilité.

Exercice 3 : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables telles que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in [0,1]$. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0 si et seulement si $\lim_{n\to} p_n = 0$.

Exercice 4 : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables telles que X_n admet pour densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} \exp(-n^2x^2/2) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que X_n converge vers 0 en probabilité.