

DEA Dynamique Non Linéaire et Applications

—

Mécanique Numérique

—

Support pour les TD d'éléments finis.

P. Laure (Patrice.Laure@inln.cnrs.fr)  
Institut Non Linéaire de Nice



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Scilab</b>	<b>9</b>
1.1	Généralité . . . . .	9
1.2	La création de Matrice et Vecteur . . . . .	10
1.3	Les opérations élémentaires . . . . .	11
1.4	Le langage de programmation . . . . .	11
1.5	Les fonctions graphiques . . . . .	12
1.6	Les exercices. . . . .	12
<b>2</b>	<b>Eléments finis 1D</b>	<b>13</b>
2.1	Généralité . . . . .	13
2.2	Le maillage . . . . .	13
2.3	Les éléments de référence 1D . . . . .	14
2.3.1	L'élément $\mathbf{P}_0$ . . . . .	14
2.3.2	L'élément $\mathbf{P}_1$ . . . . .	14
2.3.3	L'élément $\mathbf{P}_2$ . . . . .	14
2.4	la matrice de connectivité <code>CONNVEC</code> . . . . .	15
2.5	Les fonctions tests. . . . .	16
2.6	L'intégration Numérique. . . . .	16
2.6.1	Passage à l'élément de référence. . . . .	16
2.6.2	Méthode de Gauss-Legendre . . . . .	17
2.7	Calcul de la solution . . . . .	17
2.7.1	Calcul du système élémentaire . . . . .	17
2.7.2	L'algorithme d'assemblage . . . . .	18
2.7.3	Imposition des conditions aux limites. . . . .	19
2.8	Les exercices. . . . .	19
<b>3</b>	<b>Eléments finis 2D</b>	<b>21</b>
3.1	Généralité . . . . .	21
3.2	Numérotations des inconnues : <code>NUMER</code> et <code>ADRESS</code> . . . . .	22
3.3	Eléments de référence 2D . . . . .	22
3.4	L'intégration Numérique. . . . .	24
3.4.1	Passage à l'élément de référence. . . . .	24
3.4.2	Méthode de Gauss-Legendre . . . . .	25
3.5	Calcul de la solution. . . . .	26
3.5.1	Calcul du système élémentaire. . . . .	26
3.5.2	Imposition des conditions aux limites. . . . .	27
3.6	Les exercices. . . . .	28

<b>4</b>	<b>Problèmes non linéaires</b>	<b>29</b>
4.1	Les problèmes non linéaires . . . . .	29
4.1.1	Méthode du point fixe. . . . .	29
4.1.2	Méthode de Newton. . . . .	29
4.2	La programmation modulaire . . . . .	30
4.3	Les exercices. . . . .	31
<b>5</b>	<b>Eléments finis mixtes</b>	<b>33</b>
5.1	Notations . . . . .	33
5.2	Le problème de Stokes en 2D . . . . .	33
5.2.1	La formulation continue . . . . .	34
5.2.2	La formulation en terme de point-selle . . . . .	34
5.2.3	La formulation discrète . . . . .	35
5.2.4	La formulation algébrique . . . . .	35
5.3	Les éléments mixtes utilisés . . . . .	35
5.3.1	Quelques exemples pour les triangles . . . . .	36
5.3.2	Quelques exemples pour les quadrangles . . . . .	36
5.3.3	Les éléments bulles . . . . .	36
5.4	Mise en oeuvre pratique . . . . .	37
5.5	Calcul de la matrice élémentaire . . . . .	37
5.6	La condensation de la fonction “bulle” . . . . .	38
5.7	Les exercices. . . . .	38

# Table des figures

1.1	La fenêtre <code>scilab</code> . . . . .	9
2.1	Maillage en dimension 1 : $\mathbf{K} = \cup_i \mathbf{K}_i$ où $\mathbf{K}_i = T_i(\hat{\mathbf{K}})$ . $\hat{\mathbf{K}}$ est l'élément de référence qui peut avoir 2 ou 3 noeuds suivant l'approximation choisie . . . . .	14
2.2	L'élément de référence peut avoir 1, 2 ou 3 noeuds suivant l'approximation choisie . . . . .	15
2.3	Correspondance entre les numéros locaux et globaux des noeuds. . . . .	16
2.4	Contruction des fonctions tests pour l'élément $\mathbf{P}_2$ . . . . .	17
3.1	Transformation linéaire sur un quadrangle. . . . .	23
3.2	Eléments de référence les plus utilisés en dimension 2. . . . .	24
5.1	Eléments Mixtes pour un maillage de Triangles : points de discrétisation pour la vitesse ( $\bullet$ ) et la pression ( $\circ$ ). . . . .	36
5.2	Eléments Mixtes pour un maillage de Quadrangles : points de discrétisation pour la vitesse ( $\bullet$ ) et la pression ( $\circ$ ). . . . .	36



# Liste des tableaux

- 2.1 Polynômes de Lagrange  $\mathbf{P}_1$  sur l'intervalle de référence . . . . . 15
- 2.2 Polynômes de Lagrange  $\mathbf{P}_2$  sur l'intervalle de référence . . . . . 15
- 2.3 Points et poids pour l'intégration de Gauss-Legendre. . . . . 18
  
- 3.1 Polynômes de Lagrange  $\mathbf{P}_1$  sur le triangle de référence. . . . . 23
- 3.2 Polynômes de Lagrange  $\mathbf{P}_2$  sur le triangle de référence. . . . . 24
- 3.3 Polynômes de Lagrange  $\mathbf{Q}_1$  sur le carré de référence. . . . . 25
- 3.4 Polynômes de Lagrange  $\mathbf{Q}_2$  sur le carré de référence. . . . . 26
- 3.5 Points et poids pour l'intégration sur un triangle. . . . . 27





# Chapitre 1

## Séance 1 : Utilisation de Scilab

### 1.1 Généralité

Après discrétisation, la résolution d'un problème numérique revient essentiellement à manipuler des matrices et des vecteurs. C'est pour cela qu'il est judicieux d'utiliser une interface spécialisée dans la manipulation de tels objets comme **Matlab** ou **Scilab**. Pour des raisons de commodité, on va plutôt apprendre quelques intructions **Scilab** (ce logiciel est distribué gratuitement par l'INRIA à l'adresse "<http://www-rocq.inria.fr/scilab/>").

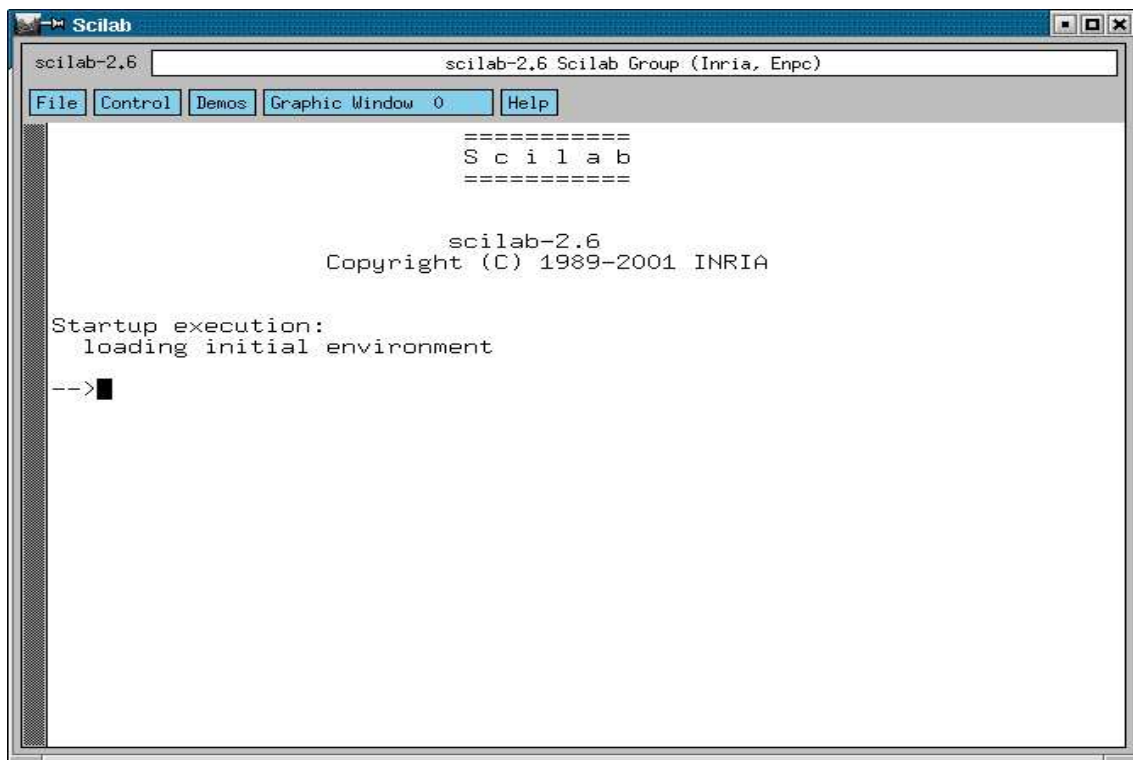


FIG. 1.1 – La fenêtre scilab

Une fois que l'on a lancé ce logiciel, on doit travailler dans la fenêtre 1.1 qui permet de taper les instructions **Scilab** après le curseur --> .

On a aussi accès à différents menus :

- \* le menu **File** permet de lire des fichiers contenant des instructions **Scilab**, de rajouter des fonctions et de sortir de **Scilab**.
- \* le menu **Control** permet de stopper et redémarrer les programmes en cours d'exécution.

\* le menu `help` explique comment utiliser les diverses instructions.

## 1.2 La création de Matrice et Vecteur

- Vecteur ligne :  $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

```
x = [1,2,3]
```

ou

```
x = [1 2 3]
```

- Vecteur colonne :  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

```
x = [1; 2; 3]
```

- Matrice :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

```
A = [1 2 3; 4 5 6]
```

- Dimension d'une matrice :

```
size(A)
```

- Vecteur ligne avec incrément constant :

```
[deb:pas:fin]
```

ou

```
linspace(deb,fin,n)
```

$v = (0 \ 2 \ \dots \ 9 \ 10) :$

```
V = 0:10 // increment 1 par default
```

- Nombre de  $x$  à  $y$  par pas de 1 :

```
x:y
```

- Nombre de  $x$  à  $y$  par pas de  $p$  :

```
x:p:y
```

- $n$  nombres entier entre  $x$  et  $y$  :

```
linspace(x,y,n)
```

- La  $i$ ème coordonnée de  $V$  :

```
V(i)
```

- La dernière coordonnée de  $V$  :

```
V($)
```

- Prend les valeurs de  $V$  de  $i_1$  à  $i_2$  :

```
V(i1:i2)
```

- Supprime les coordonnées de  $i_1$  à  $i_2$  :

```
V(i1:i2) = []
```

- Sélection d'un élément dans une matrice :

la valeur à la 2ème ligne et 2ème colonne

```
A(2,2)
```

le 1er vecteur colonne

```
A(:,1)
```

- Concaténation de matrice

$M = \begin{pmatrix} A & A \end{pmatrix} :$

$$M = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} :$$

$$M = [A, A]$$

- Matrice de zéros :

$$M = [A; A]$$

$$\text{zeros}(m,n)$$

- Matrice de un :

$$\text{ones}(m,n)$$

- Matrice identité :

$$\text{eye}(m,n)$$

- Redimensionner la matrice  $A$ ,  $m$  et  $n$  étant les nouvelles dimensions :

$$\text{matrix}(A,m,n)$$

### 1.3 Les opérations élémentaires

On peut faire de manière simple des opérations sur les matrices :

- Les opérations élémentaires sur des matrices  $A$  et  $B$  :

$$*, \wedge, +, -$$

$$A*B$$

$$A^2$$

$$\dots$$

- les opérations terme à terme :

$$.*, ./, ./, .^$$

on met chaque élément de  $A$  au carré

$$A.^2$$

- Solution d'un système linéaire :

$$x \text{ solution de } Ax = b$$

$$A \setminus b$$

$$x \text{ solution de } xA = b$$

$$A / b$$

- La transposé de  $A$  :

$$A'$$

- L'inverse, la trace et le déterminant de la matrice  $A$  :

$$\text{inv}(A)$$

$$\text{trace}(A)$$

$$\text{det}(A)$$

### 1.4 Le langage de programmation

Comme pour tout langage, on peut écrire des programmes à l'aide des instructions élémentaires usuelles :

- Boucle :

```
for i=1:4
    <instruction>
```

- Boucle conditionnelle :
 

```

end;
while <condition>
  <instruction>
end;

```

- Instruction sous condition :
 

```

if <condition> then
  <instruction>
else
  <instruction>
end;

```

Pour les conditions, on peut utiliser les opérateurs de comparaison :

<> différent de; == égal à; < et > pour supérieur et inférieur.

et les opérateurs logiques :

& et, | ou.

- Ecrire une fonction :  
il faut ouvrir un fichier que l'on appelle `nom_de_la_fonction.sci` dans lequel on écrit les lignes suivantes.

```

function [s1,s2]=nom_de_la_fonction(e1,e2)
  <instruction>
endfunction

```

où `e1` et `e2` sont les variables d'entrée et `s1` et `s2` les variables de sortie.

Puis sous **Scilab**, on utilise la commande `exec('nom_de_la_fonction.sci');` .

## 1.5 Les fonctions graphiques

les principales sont `plot2d`, `plot3d` et `contour2d` (faire `help` le nom de la fonction pour plus d'information). Il y a aussi `xbasc()` et `xdel()` pour effacer les dessins ou fermer la fenêtre graphique.

## 1.6 Les exercices.

**Objectifs :**

- ⇒ Apprendre quelques rudiments sur **scilab**.
- ⇒ Calcul de la solution d'une équation par les différences finies.

# Chapitre 2

## Séance 2 : Éléments finis 1D

### 2.1 Généralité

On peut rappeler sommairement le principe du calcul par éléments finis sur un exemple. On doit résoudre l'équation suivante

$$\begin{aligned} -u'' + u &= 1 \\ u(0) &= a \quad \text{et} \quad u(1) = b \end{aligned}$$

en écrivant la formulation faible

$$\int_0^1 (u' v' + u v) dx = \int_0^1 v dx + [u'(1) v(1) - u'(0) v(0)]$$

où  $v$  appartient à une base convenable de fonction test  $(\phi_i)$ . Sur cette base la solution  $u$  s'écrit :

$$u = \sum_i u_i \phi_i. \tag{2.1}$$

Finalement, pour le vecteur  $U = (u_i)_i$  le système linéaire à résoudre  $A U = F$  est obtenu par

$$a_{ij} = \int_0^1 [\phi_j' \phi_i' + \phi_j \phi_i] dx \quad \text{et} \quad f_i = \int_0^1 \phi_i dx \tag{2.2}$$

C'est le choix des fonctions tests  $\phi_i$  qui va conditionner le reste du calcul.

### 2.2 Le maillage

Un programme éléments finis utilise un maillage. C'est à dire une partition du domaine  $\mathbf{K}$  où est défini l'équation en plusieurs **Nelt** petits domaines ou *éléments*. Dans notre exemple  $\mathbf{K} = [0, 1]$ , et  $\mathbf{K} = \bigcup_{k=1}^{\mathbf{Nelt}} \mathbf{K}_k$  où les  $\mathbf{K}_k = [x_1^k, x_2^k]$  sont des sous intervalles de  $\mathbf{K}$  (voir Figure 2.1).

Comme la structure du programme de résolution associé à un certain type d'équation ne doit pas dépendre du maillage choisie, ce maillage doit être structurée d'une certaine façon et il doit fournir les informations suivantes :

- **Nelt** le nombre d'éléments.
- **Nno** le nombre de noeuds par éléments. Ce nombre est conditionné par le type d'approximation choisie.
- la matrice **COOR** de taille **Npt** x (dimension de l'espace) qui donne les coordonnées des noeuds du maillage. Il faut noter que **Npt** le nombre total de noeuds se déduit en général de **Nelt** et **Nno**.
- la matrice **CONNec** de taille **Nelt** x **Nnno** qui permet de passer de la numérotation locale des noeuds sur un élément à sa position dans la matrice **COOR**.

## 2.3 Les éléments de référence 1D

Dans les cas les plus simples, chaque élément est déduit d'un élément de référence,  $\hat{\mathbf{K}}$ , par une transformation linéaire  $T_k$ . En une dimension, cet élément de référence est défini sur l'intervalle  $[-1,1]$  et la transformation linéaire est très simple (voir Figure 2.1) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &\rightarrow \mathbf{K}_k \\ \xi &\rightarrow x = T_k(\xi) = x_1^k L_1(\xi) + x_2^k L_2(\xi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont les polynôme de Lagrange de degré 1 (cf. Table 2.1).

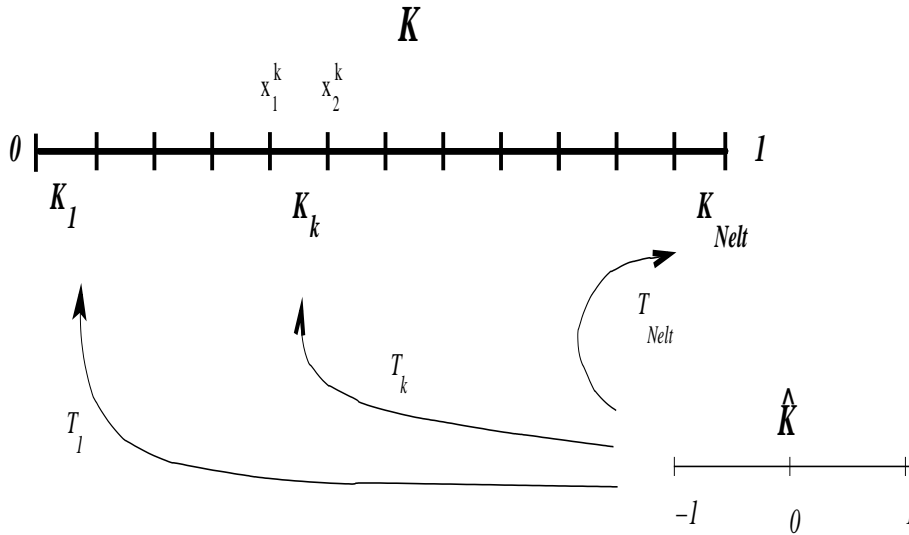


FIG. 2.1 – Maillage en dimension 1 :  $\mathbf{K} = \cup_i \mathbf{K}_i$  où  $\mathbf{K}_i = T_i(\hat{\mathbf{K}})$ .  $\hat{\mathbf{K}}$  est l'élément de référence qui peut avoir 2 ou 3 noeuds suivant l'approximation choisie

Sur cet élément, on sélectionne  $N_{no}$  noeuds et on construit une base de polynôme  $L_i$  de degré  $N_{no}-1$  qui vaut 1 sur un noeud et 0 sur les autres (ce sont les polynômes de Lagrange). A partir de ces polynômes de Lagrange  $L_i$ , on peut définir sur chaque élément  $\mathbf{K}_k$   $N_{no}$  fonctions polynomiales  $\psi_i^k$  :

$$\psi_i^k(x) = L_i(T_k^{-1}(x)) \quad \text{pour } x \in \mathbf{K}_k \quad (2.4)$$

On considéra trois types d'éléments :  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  (voir Figure 2.2)

### 2.3.1 L'élément $\mathbf{P}_0$

Cet élément est le plus simple car  $N_{no} = 1$  et  $L_1(\xi) = 1$  ; cela revient à approcher la solution par une fonction constante par morceaux (c'est une approximation qui n'est pas continue).

### 2.3.2 L'élément $\mathbf{P}_1$

Pour cet élément, on prend  $N_{no} = 2$  et les  $L_i$  sont donnés dans le tableau 2.1.

### 2.3.3 L'élément $\mathbf{P}_2$ .

Pour cet élément, on prend  $N_{no} = 3$  et les polynômes  $L_i$  sont données dans le tableau 2.2. Le numéro local du noeud central est **3** (voir Figure 2.2), pour ne pas avoir à trop modifier le programme quand on passe de l'élément  $\mathbf{P}_1$  à  $\mathbf{P}_2$ .

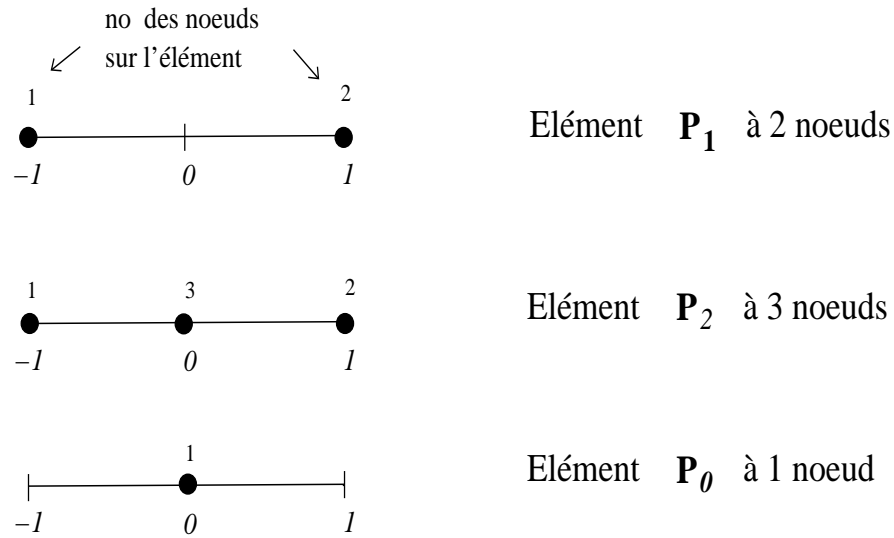


FIG. 2.2 – L'élément de référence peut avoir 1, 2 ou 3 noeuds suivant l'approximation choisie

$i$	$L_i(\xi)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$
1	$\frac{1-\xi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1+\xi}{2}$	$\frac{1}{2}$

TAB. 2.1 – Polynômes de Lagrange  $\mathbf{P}_1$  sur l'intervalle de référence

$i$	$L_i(\xi)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$
1	$\frac{\xi(1-\xi)}{2}$	$\xi - \frac{1}{2}$
2	$\frac{\xi(1+\xi)}{2}$	$\xi + \frac{1}{2}$
3	$1 - \xi^2$	$-2\xi$

TAB. 2.2 – Polynômes de Lagrange  $\mathbf{P}_2$  sur l'intervalle de référence

## 2.4 la matrice de connectivité CONNNEC.

On place les coordonnées de tous les noeuds du domaine  $\mathbf{K}$  dans une matrice que l'on note  $\mathbf{COOR}$ . Sa dimension est  $\mathbf{Npt} \times \mathbf{Dim}$  où  $\mathbf{Npt}$  est le nombre total de noeuds et  $\mathbf{Dim}$  est la dimension de la géométrie (1, 2 ou 3).

Pour notre exemple  $\mathbf{Dim} = 1$  et  $\mathbf{Npt} = \mathbf{Nelt} * (\mathbf{Nno} - 1) + 1$ .

La matrice de connectivité  $\mathbf{CONNNEC}$  de taille  $\mathbf{Nelt} \times \mathbf{Nno}$  permet de donner la position du  $i$ ème noeud

du  $k$ ème élément par l'affectation

$$x_i^k = \text{COOR}(\text{CONNec}(k, i)).$$

Cette correspondance entre les numéro locaux (sur l'élément) et globaux (sur la matrice COOR) est assez facile à écrire pour les problèmes unidimensionnels à l'aide de la figure 2.3. Par exemple pour l'élément  $\mathbf{P}_2$  :

$$\text{CONNec} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

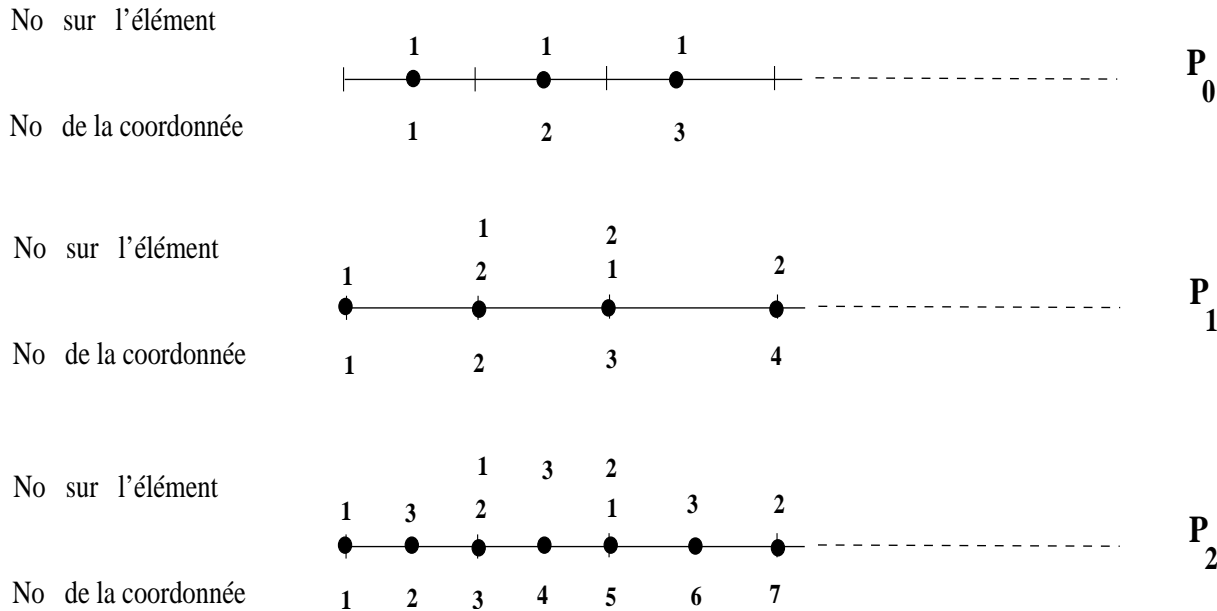


FIG. 2.3 – Correspondance entre les numéros locaux et globaux des noeuds.

## 2.5 Les fonctions tests.

La base des fonctions test,  $\phi_i$  (c.f. equation 2.1) se construit à partir des fonctions,  $\psi_j^k$  (définies sur chaque élément  $\mathbf{K}_k$ ) de façon à ce que chaque fonction  $\phi_i$  soit égale à 1 sur un noeud et nulle sur les autres. La figure 2.4 montre schématiquement comment contruire ces fonctions pour l'élément  $\mathbf{P}_2$ . Dans la pratique on effectue pas cette opération de façon explicite car on fait un balayage sur les élément. Il faut seulement noter que

$$\int_{\mathbf{K}} \phi_i dx = \int_{\mathbf{K}_k} \phi_i dx \quad \text{ou} \quad \int_{\mathbf{K}_k} \phi_i dx + \int_{\mathbf{K}_{k\pm 1}} \phi_i dx$$

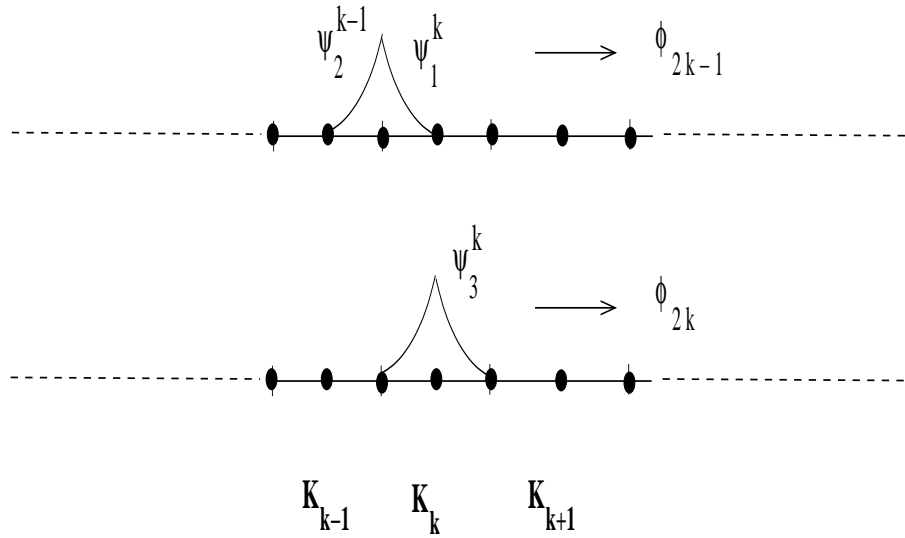
suivant que le noeud où  $\phi_i(x_i) = 1$  appartient à un seul ou deux éléments.

## 2.6 L'intégration Numérique.

### 2.6.1 Passage à l'élément de référence.

Pour calculer les matrices  $A$  et  $F$  de l'équation (2.2), il faut évaluer des intégrales de la forme  $\int_{\mathbf{K}_k} f(x) dx$ . La fonction  $f(x)$  fait intervenir les fonctions d'interpolation  $\psi_j^k$  et les propriétés phy-



FIG. 2.4 – Construction des fonctions tests pour l'élément  $\mathbf{P}_2$ .

siques du problème.

La première étape consiste à faire un changement de variable pour évaluer cette intégrale sur l'élément de référence  $\hat{\mathbf{K}}$  :

$$\int_{\mathbf{K}_k} f(x) dx = \int_{\hat{\mathbf{K}}} g(\xi) Jac^k(\xi) d\xi$$

où  $Jac^k(\xi)$  est le Jacobien de la transformation  $T^k$  et  $g(\xi) = f(T_k^{-1}(x))$ . Pour la transformation (2.3), le Jacobien est constant

$$Jac^k = \frac{x_2^k - x_1^k}{2}$$

On a aussi les relations suivantes :

$$\psi_i^k(x) = L_i(\xi) \quad ; \quad \frac{d\psi_i^k}{dx}(x) = \frac{dL_i}{d\xi}(\xi) \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{Jac^k} \frac{dL_i}{d\xi}(\xi)$$

### 2.6.2 Méthode de Gauss-Legendre

Cette méthode consiste à approcher l'intégrale par une expression de la forme

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \simeq \sum_{i=1}^{Ng} p_i g(\xi_i) \quad (2.5)$$

où  $Ng$  est le nombre de points de Gauss utilisés,  $p_i$  et  $\xi_i$  étant les poids et les coordonnées de ces points (c.f. Table 2.3).

La quadrature de Gauss à  $Ng$  points est exacte pour des polynômes de degré  $2 Ng - 1$ . Pour notre exemple, on doit évaluer des polynômes de degré maximum 4 (pour une approximation  $\mathbf{P}_2$ ), il suffit de prendre  $Ng = 3$ .

## 2.7 Calcul de la solution

### 2.7.1 Calcul du système élémentaire

Si on a une seule variable et un seul degré de liberté par noeud, on peut utiliser sur chaque élément  $\mathbf{K}_k$  une relation de la forme :

$$u(x)|_{\mathbf{K}_k} = u^k(x) = \sum_{j=1}^{Nno} u_j^k \psi_j^k(x) \quad (2.6)$$

Ng	Points d'intégration $x_i$	Poids d'intégration $p_i$	Degré de précision
1	0	2	1
2	-0.577350262918 0.577350262918	1 1	3
3	-0.774596669241483 0. 0.774596669241483	.5555555555555556 .888888888888889 .555555555555556	5
4	-0.861136311594052 -0.339981043584856 0.339981043584856 0.861136311594052	.347854845137454 .652145154862545 .652145154862545 .347854845137454	7
5	-0.906179845938664 -0.538469310105683 0. 0.538469310105683 0.906179845938664	.236926885056189 .478628670499365 .568888889888889 .478628670499365 .236926885056189	9
6	-.932469514203152 -.661209386466265 -.238619186083197 .238619186083197 .661209386466265 .932469514203152	.171324492379170 .360761573048139 .467913934572691 .467913934572691 .360761573048139 .171324492379170	11

TAB. 2.3 – Points et poids pour l'intégration de Gauss-Legendre.

où le vecteur  $U^k = (u_j^k)$  est le vecteur des degrés de liberté élémentaire. La correspondance entre  $u_i^k$  et  $u_i$  est donnée par la matrice **ADRESS**.

Si on ne tient pas compte des problèmes liées à l'imposition des conditions aux limites, on obtient le système élémentaire  $\mathbf{Nno} \times \mathbf{Nno}$  suivant

$$A^k U^k = F^k \quad (2.7)$$

où :

$$a_{ij}^k = \int_{x_1^k}^{x_2^k} [\psi_j^{k'} \psi_i^{k'} + \psi_j^k \psi_i^k] dx$$

$$f_i^k = \int_{x_1^k}^{x_2^k} \psi_i^k dx$$

$A^k$  est appelée *matrice élémentaire*.

## 2.7.2 L'algorithme d'assemblage

L'étape de l'assemblage consiste à prendre en compte les contributions de tous les systèmes élémentaires pour construire un système global que l'on devra résoudre pour obtenir la solution. Les coefficients  $a_{ij}$  et  $f_i$  sont construits à partir des fonctions tests  $\phi_i$  (c.f. relation 2.1). Comme ces fonctions tests sont nulles presque partout sauf sur certain élément où elles correspondent à une fonction  $\psi_j^k$ , ces coefficients

peuvent se déduire des coefficients  $a_{ij}^k$  et  $f_j^k$ . L'algorithme d'assemblage est le suivant ( `A_glob` et `F_glob` correspondent à  $A$  et  $F$ ; `A_el` et `F_el` à  $A^k$  et  $F^k$ ).

```
// initialisation de A et F a zero
A_glob = zeros(Npt,Npt); F_glob = zeros(Npt,1)
for k=1:Nelt // boucle sur les elements
    < calcul de A_el et F_el >

    for k1=1:Nno // debut boucle sur les lignes

        i = ADRESS(k,k1)
        F_glob(i) = F_glob(i) + F_el(k1)

        for k2=1:Nno // debut boucle sur les colonnes

            j = ADRESS(k,k2)
            A_glob(i,j) = A_glob(i,j) + A_el(k1,k2)

        end; // fin boucle sur les colonnes

    end; // fin boucle sur les lignes

end; // fin boucle sur les elements
```

On a écrit l'algorithme d'assemblage en utilisant la matrice `ADRESS` qui permet de passer de la numérotation des degrés de liberté (ou des inconnues) sur l'élément à la numérotation globale. Dans les exemples assez simples étudiés dans ce Chapitre, on peut prendre `ADRESS = CONNEC`.

### 2.7.3 Imposition des conditions aux limites.

Pour un problème 1D, l'imposition des conditions aux limites est assez simple car il faut seulement s'occuper des deux points extrêmes ( $x = 0$  et  $x = 1$ ). Cela revient à changer comme pour les différences finies la première et la dernière lignes de la matrice globale.

Par exemple, si on a une condition de Diriclet  $u(0) = a$ , on associe à la première ligne de la matrice l'équation  $u_1 = 0$ .

Si on a une condition de Neumann, on ne modifie pas la matrice globale.

Pour les problème de dimension plus élevée ce n'est pas aussi simple. C'est pour cela que l'on va numéroter les degrés de liberté afin de séparer les vraies inconnues que l'on doit déterminer et les valeurs fixées par les conditions aux limites de Diriclet. Cela est expliquée dans le prochain chapitre.

## 2.8 Les exercices.

### Objectifs :

- ⇒ Faire un maillage 1D (Matrices `CONNEC`, `COORD`).
- ⇒ L'intégration numérique par les points de Gauss.
- ⇒ Programmer l'assemblage.



# Chapitre 3

## Séance 3 : Éléments finis 2D

La structure d'un programme éléments finis ne change pas trop quand on augmente la dimension du problème. Il suffit de connaître les nouveaux éléments qui sont maintenant bidimensionnels et d'explicitier le passage de l'élément de référence à un élément quelconque.

### 3.1 Généralité

Pour des dimensions supérieures à un, le maillage (c'est à dire les matrices CONNEC et COOR) est donné par un mailleur car il est plus difficile de mailler une géométrie complexe avec un simple petit programme. De plus, il faut optimiser la numérotation des noeuds pour limiter la taille mémoire quand on inverse le système linéaire.

On va surtout s'attacher à décrire les éléments de référence usuels pour les problèmes bidimensionnels et à expliciter le calcul du système élémentaire pour le problème suivant :

$$-\Delta u = f \quad \text{sur un carré} \quad [0, 1] \times [0, 1]$$

avec les conditions aux limites

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0$$

la formulation faible s'écrit

$$\int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f v dx dy + \int_0^1 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} v \right]_{x=0}^{x=1} dy + \int_0^1 \left[ \frac{\partial u}{\partial y} v \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

où  $v$  appartient à une base convenable de fonction test  $\phi_i$ . Les derniers termes sont nuls car on choisit habituellement une base de fonctions tests qui s'annulent sur les frontières où il y a une condition aux limites de Diriclet. Sur cette base la solution  $u$  s'écrit :

$$u = \sum_i u_i \phi_i(x, y). \tag{3.1}$$

Finalement, pour le vecteur  $U = (u_i)_i$ , le système linéaire à résoudre  $A U = F + S$  est obtenu par

$$a_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx dy \quad ; \quad f_i = \int_0^1 \int_0^1 \phi_i dx dy \tag{3.2}$$

et  $S$  dépend des conditions aux limites.

### 3.2 Numérotations des inconnues : NUMER et ADRESS.

Le mailleur fournit les noeuds (la matrice **COORD**) et la matrice de connectivité **CONNEC**. Mais il peut avoir plusieurs degrés de liberté par noeud et il faut aussi identifier les degrés de liberté qui sont fixés par les conditions aux limites de Diriclet. C'est pour cela que l'on va introduire une nouvelle matrice **NUMER** qui va pouvoir relier le numéro de l'inconnue au noeud auquel il est associé.

Pour simplifier, on suppose que l'on a une seule variable physique et un seul degré de liberté par noeud. Par conséquent, on a **Npt** degré de liberté  $u_i$ . Si la solution doit vérifier des conditions aux limites de type Diriclet, on place ces degrés de liberté dans un vecteur dont les **NI** premières composantes sont les inconnues du problème et les autres étant celles qui sont fixées par les condition aux limites :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{\text{Npt}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^I \\ U^C \end{pmatrix}$$

La correspondance entre les noeuds et les degrés de liberté est faite à l'aide de la table **NUMER** (de dimension **Npt**) qui contient pour chaque noeud le numéro du degré de liberté qui lui est associé. Le programme permettant de créer cette table peut avoir la forme suivante :

```

NI = 0;
nc = 0;
for i=1:Npt
  x = COOR(i);
  if <'teste si le point x n'est pas une cond. limite de type Diriclet'>
    NI = NI+1;
    NUMER(i) = NI;
  else
    NUMER(i) = Npt-nc;
    nc = nc + 1;
  end;
end;
end;

```

Après avoir exécuter ce programme, on a le nombre exacte d'inconnue **NI**. On peut maintenant construire facilement la matrice d'adressage qui donne pour chaque élément  $\mathbf{K}_k$  les numéros des degré de liberté qui lui sont associés. Par exemple, le degré de liberté associé au  $i$ ème noeud du  $k$ ème élément est :

$$\text{ADRESS}(k,i) = \text{NUMER}(\text{CONNEC}(k,i))$$

### 3.3 Eléments de référence 2D

En général, on utilise des triangles (élément  $\mathbf{P}_1$  ou  $\mathbf{P}_2$ ), mais à cause de la géométrie particulière du problème on va plutôt choisir des quadrangles (éléments  $\mathbf{Q}_1$  ou  $\mathbf{Q}_2$ )

Dans les cas les plus simples, chaque élément est déduit d'un élément de référence,  $\hat{\mathbf{K}}$ , par une transformation linéaire  $T_k$  (voir figure 3.1) :

$$\hat{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbf{K}_k$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_k(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{3 \text{ ou } 4} \begin{pmatrix} x_j^k \\ y_j^k \end{pmatrix} L_j(\xi, \eta) \quad (3.3)$$

suivant que l'on a des triangles ou des quadrangles. Les fonctions  $L_i$  sont respectivement les polynômes de Lagrange du tableau 3.1 ou 3.3 pour les triangles ou les quadrangles.

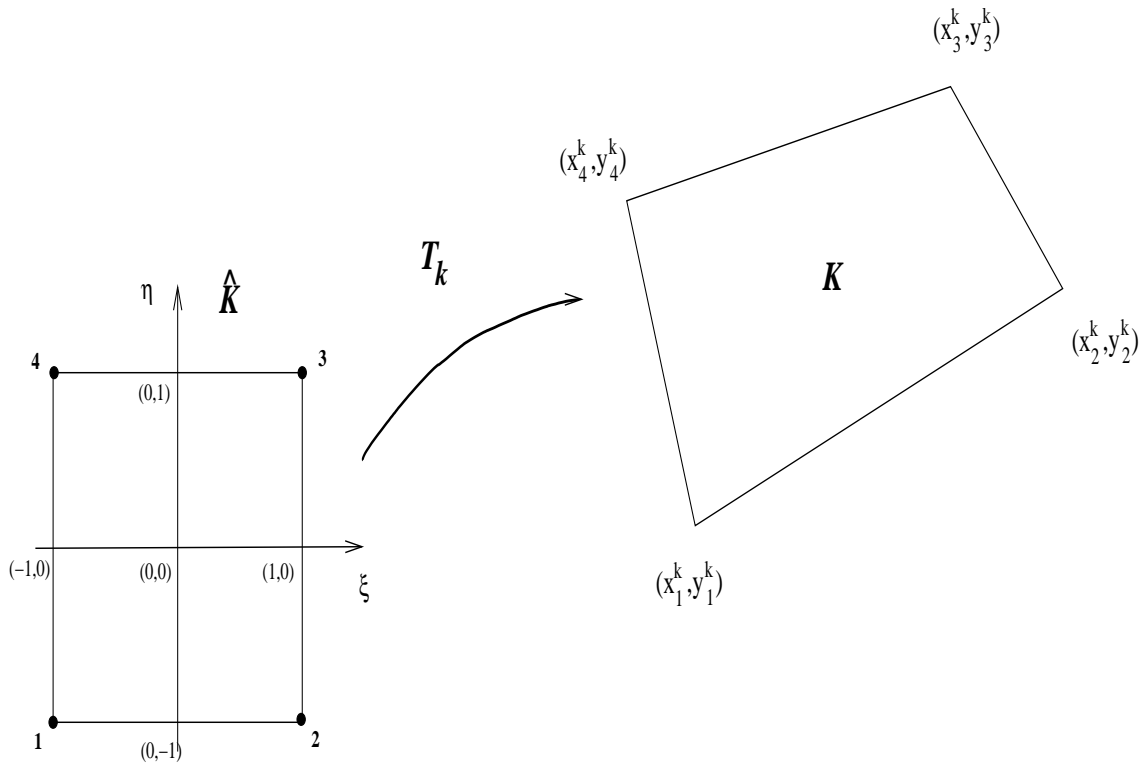


FIG. 3.1 – Transformation linéaire sur un quadrangle.

Les différents éléments de référence ainsi que la numérotation locale des noeuds sont tracés sur la figure 3.2 . Les fonctions de Lagrange sont choisies de façon à ce qu'elles valent 1 sur un des noeuds et 0 sur les autres (d'autre choix de fonction sont possible). En résumé il s'agit de :

- L'élément  $\mathbf{P}_1$ , pour lequel  $\text{Nno} = 3$  et les  $L_i$  sont donnés dans le tableau 3.1.
- L'élément  $\mathbf{P}_2$ , pour lequel  $\text{Nno} = 6$  et les  $L_i$  sont donnés dans le tableau 3.2.
- L'élément  $\mathbf{Q}_1$ , pour lequel  $\text{Nno} = 4$  et les  $L_i$  sont donnés dans le tableau 3.3.
- L'élément  $\mathbf{Q}_2$ , pour lequel  $\text{Nno} = 9$  et les  $L_i$  sont donnés dans le tableau 3.4.

$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$	$\frac{dL_i}{d\eta}$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	$\xi$	1	0
3	$\eta$	0	1

TAB. 3.1 – Polynômes de Lagrange  $\mathbf{P}_1$  sur le triangle de référence.

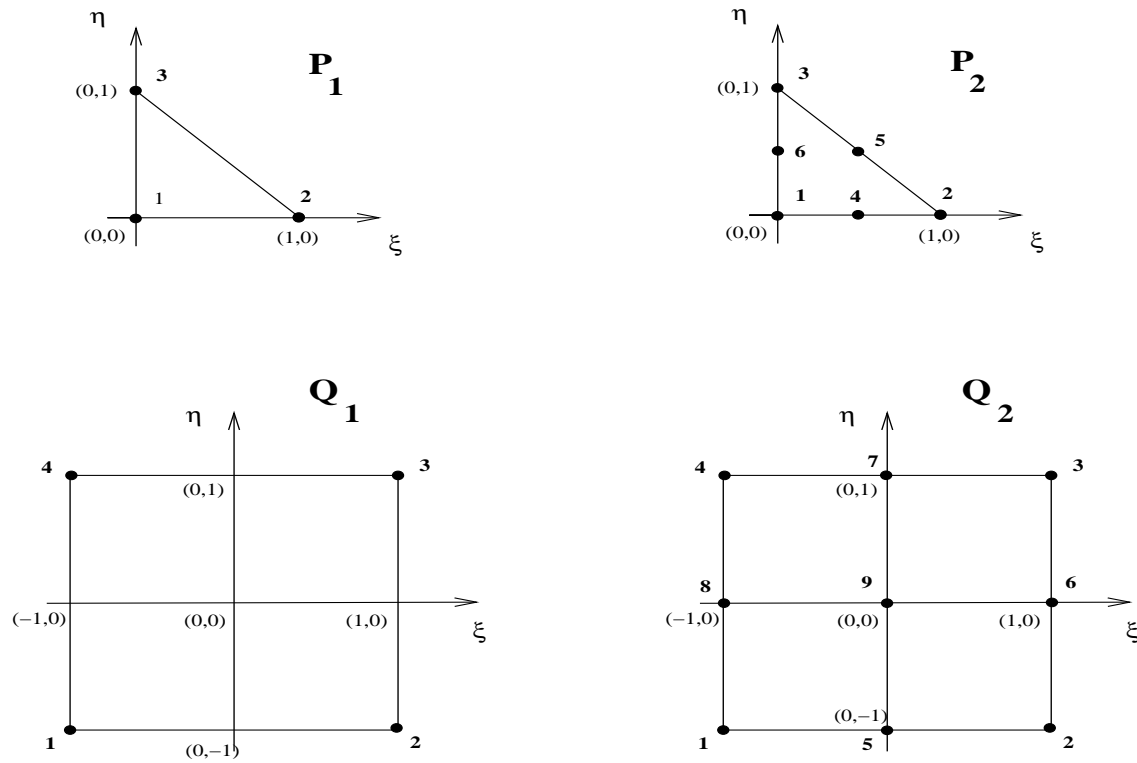


FIG. 3.2 – Eléments de référence les plus utilisés en dimension 2.

$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$	$\frac{dL_i}{d\eta}$
1	$1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2$	$-3 + 4(\xi + \eta)$	$-3 + 4(\xi + \eta)$
2	$-\xi(1 - 2\xi)$	$-1 + 4\xi$	0
3	$-\eta(1 - 2\eta)$	0	$-1 + 4\eta$
4	$4\xi(1 - \xi - \eta)$	$4(1 - 2\xi - \eta)$	$-4\xi$
5	$4\xi\eta$	$4\eta$	$4\xi$
6	$4(1 - \xi - \eta)\eta$	$-4\eta$	$4(1 - \xi - 2\eta)$

TAB. 3.2 – Polynômes de Lagrange  $\mathbf{P}_2$  sur le triangle de référence.

### 3.4 L'intégration Numérique.

#### 3.4.1 Passage à l'élément de référence.

Il faut donc évaluer des intégrales de la forme  $\int \int_{\mathbf{K}_k} f(x, y) dx dy$ . La première étape consiste à faire un changement de variable pour évaluer cette intégrale sur l'élément de référence  $\hat{\mathbf{K}}$  :



$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$	$\frac{dL_i}{d\eta}$
1	$\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$	$-\frac{1}{4}(1-\eta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)$
2	$\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$	$\frac{1}{4}(1-\eta)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)$
3	$\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$	$\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)$
4	$\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$	$-\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)$

TAB. 3.3 – Polynômes de Lagrange  $\mathbf{Q}_1$  sur le carré de référence.

où  $Jac^k(\xi, \eta)$  est le Jacobien de la transformation  $T_k$  et  $g(\xi, \eta) = f(T_k^{-1}(x, y))$ . Pour la transformation (3.3), le Jacobien est le déterminant de la matrice Jacobienne

$$DT_k = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3/4} x_j^k \frac{\partial L_j}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^{3/4} x_j^k \frac{\partial L_j}{\partial \eta} \\ \sum_{j=1}^{3/4} y_j^k \frac{\partial L_j}{\partial \xi} & \sum_{j=1}^{3/4} y_j^k \frac{\partial L_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

On a aussi les relations suivantes (avec les mêmes notations que dans le Chapitre 2) :

$$\psi_j^k(x, y) = L_j(\xi, \eta) \quad ; \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_j^k}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_j^k}{\partial y} \end{pmatrix} = (DT_k^{-1})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial L_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial L_j}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

### 3.4.2 Méthode de Gauss-Legendre

Si l'élément de référence est un quadrangle, on étend la formule 1D (relation (2.5)) au cas 2D en mettant une double somme :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_{j=1}^{Ng} \sum_{i=1}^{Ng} p_j p_i g(\xi_i, \eta_j)$$

où les  $p_i$ ,  $\xi_i$  et  $\eta_i$  sont toujours donnés par le tableau 2.3.

Si l'élément de référence est un triangle, on utilise la relation

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} g(\xi, \eta) d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_{i=1}^{Ng} p_i g(\xi_i, \eta_i)$$

où les  $p_i$ ,  $\xi_i$  et  $\eta_i$  sont donnés dans la table 3.5. C'est la quadrature de Hammer.

$i$	$L_i(\xi, \eta)$	$\frac{dL_i}{d\xi}$	$\frac{dL_i}{d\eta}$
1	$\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 - \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 - 2\xi)(1 - \eta)\eta/4$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 - 2\eta)$
2	$-\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 - \eta)\eta$	$-\frac{1}{4}(1 + 2\xi)(1 - \eta)\eta$	$-\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 - 2\eta)$
3	$\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 + \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 + 2\xi)(1 + \eta)\eta$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi(1 + 2\eta)$
4	$-\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 + \eta)\eta$	$-\frac{1}{4}(1 - 2\xi)(1 + \eta)\eta$	$-\frac{1}{4}(1 - \xi)\xi(1 + 2\eta)$
5	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)\eta$	$\xi(1 - \eta)\eta$	$-\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - 2\eta)$
6	$\frac{1}{2}(1 + \xi)\xi(1 - \eta^2)$	$\frac{1}{2}(1 + 2\xi)(1 - \eta^2)$	$-(1 + \xi)\xi\eta$
7	$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)\eta$	$-\xi(1 + \eta)\eta$	$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + 2\eta)$
8	$-\frac{1}{2}(1 - \xi)\xi(1 - \eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1 - 2\xi)(1 - \eta^2)$	$\xi(1 - \xi)\eta$
8	$(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$	$-2\xi(1 - \eta^2)$	$-2(1 - \xi^2)\eta$

TAB. 3.4 – Polynômes de Lagrange  $\mathbf{Q}_2$  sur le carré de référence.

### 3.5 Calcul de la solution.

#### 3.5.1 Calcul du système élémentaire.

Si on a une seule variable et un seul degré de liberté par noeud, on peut utiliser sur chaque élément  $\mathbf{K}_k$  une relation de la forme :

$$u(x)|_{\mathbf{K}_k} = u^k(x) = \sum_{j=1}^{\text{Nno}} u_j^k \psi_j^k(x) \quad (3.5)$$

où le vecteur  $U^k = (u_j^k)$  est le vecteur des degrés de liberté élémentaire. La correspondance entre  $u_j^k$  et  $u_i$  est donnée par la matrice **ADRESS**.

Si on ne tient pas compte des problèmes liées à l'imposition des conditions aux limites, on obtient le système élémentaire  $\text{Nno} \times \text{Nno}$  suivant

$$A^k U^k = F^k \quad (3.6)$$

Ng	Points d'intégration $x_i$	Points d'intégration $y_i$	Poids d'intégration $p_i$	Degré de précision
1	0.3333333333333333	0.3333333333333333	0.5	1
3	0.6666666666666667 0.1666666666666667 0.1666666666666667	0.1666666666666667 0.6666666666666667 0.1666666666666667	0.1666666666666667 0.1666666666666667 0.1666666666666667	2
4	0.3333333333333333 0.2 0.2 0.6	0.3333333333333333 0.2 0.6 0.2	-0.281250 0.2604166666666667 0.2604166666666667 0.2604166666666667	3
6	0.108103018168070 0.445948490915965 0.445948490915965 0.816847572980459 0.091576213509771 0.091576213509771	0.445948490915965 0.108103018168070 0.445948490915965 0.091576213509771 0.816847572980459 0.091576213509771	0.1116907948390055 0.1116907948390055 0.1116907948390055 0.0549758718276610 0.0549758718276610 0.0549758718276610	4

TAB. 3.5 – Points et poids pour l'intégration sur un triangle.

où :

$$a_{ij}^k = \int \int_{\mathbf{K}} [\nabla \psi_j^k]^T [\nabla \psi_i^k] dx dy \quad \text{avec} \quad [\nabla \psi_j^k] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_j^k}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_j^k}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$f_i^k = \int \int_{\mathbf{K}} \psi_i^k dx dy$$

Pour calculer numériquement ces intégrales on passe à l'élément de référence :

$$a_{ij}^k = \int \int_{\hat{\mathbf{K}}} [\nabla \psi_j^k]^T [\nabla \psi_i^k] Jac^k d\xi d\eta \quad \text{avec} \quad [\nabla \psi_j^k] = (DT_k^{-1})^T [\nabla L_j]$$

$$f_i^k = \int \int_{\hat{\mathbf{K}}} L_i Jac^k d\xi d\eta$$

où la matrice jacobienne  $DT_k$  est donnée par l'équation (3.4).

### 3.5.2 Imposition des conditions aux limites.

L'assemblage s'effectue comme décrit dans le chapitre précédent. Une fois le système global assemblé, il prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^I \\ U^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^C \\ S^I \end{pmatrix}$$

Cette partition particulière provient de la numérotation des degrés de liberté que nous avons établie (voir Section 3.2). Les termes  $S^C$  et  $U^C$  sont connus. Le terme  $S$  est là pour prendre en compte le saut

des variables secondaires ( $du/dx$ ) quand on passe d'un élément à l'autre. En général  $S^C \equiv 0$ , sauf si on a des conditions aux limites de type Neumann.

Par exemple, si  $u'(x) = d$  pour  $x \in \Gamma$ , on a  $\mathbf{S}(\text{NUMER}(i)) = \mathbf{d}$  pour  $i$  tel que  $\text{COOR}(i, :)$  appartient à  $\Gamma$ , tandis que les autres termes sont nuls.

Si on a des conditions aux limites de type Diriclet,  $u(x) = a$  pour  $x \in \Gamma$ , alors  $U^c(i) = a$  pour  $i$  tel que  $\text{COOR}(i, :)$  appartient à  $\Gamma$ .

Finalement, la solution va être obtenue en résolvant :

$$M_{11} U^I = F_1^C + S^C - M_{12} U^C$$

On peut calculer  $S^I$  après avoir déterminé  $U^I$  par

$$S^I = M_{21} U^I + M_{22} U^C - F_2^C$$

### 3.6 Les exercices.

**Objectifs :**

⇒ Ecrire les équations et le programme qui permet de calculer le système élémentaire pour une géométrie 2D.

# Chapitre 4

## Séance 4 : Programmation modulaire - Problèmes non linéaires

### 4.1 Les problèmes non linéaires

Il peut arriver que la formulation faible d'un problème se mette sous la forme

$$\int_{\Omega} F(u) w \, d\Omega = \int_{\Omega} f w \, d\Omega \quad (4.1)$$

où est  $w$  une fonction test et  $F$  une fonction non linéaire de  $u$ . Pour trouver une solution de ce type de problème, on utilise des méthodes itératives. C'est à dire on part d'une solution initiale  $u^0$  et à chaque étape on va calculer une solution  $u^n$  qui devrait converger vers la solution finale.

#### 4.1.1 Méthode du point fixe.

Cela revient à fixer certains termes dans  $F$  afin que l'équation (4.1) devienne linéaire

$$F(u) \sim G(u_{\text{connue}}) L(u) \quad \text{avec} \quad L \text{ linéaire par rapport à } u$$

L'algorithme est le suivant :

$u^n$  a été calculé à l'étape  $n$

$u^{n+1}$  est solution de

$$\int_{\Omega} G(u^n) L(u^{n+1}) w \, d\Omega = \int_{\Omega} f w \, d\Omega \quad (4.2)$$

si  $\|u^n - u^{n+1}\| < \epsilon$  on arrête

Curieusement cette méthode assez sommaire marche assez souvent, mais ne converge pas très vite.

#### 4.1.2 Méthode de Newton.

Cette méthode consiste à linéariser l'équation (4.1) en faisant un développement de Taylor de  $F$  par rapport à  $u$ .

Pour faire simple, on peut dire que l'on a un  $u$  qui ne vérifie pas l'équation et on cherche la déviation  $\delta u$  à  $u$  qui donne une "meilleure" solution  $u + \delta u$ .

Si le développement limité s'écrit  $F(u + \delta u) = F(u) + L[\delta u] + \dots$  alors  $\delta u$  est solution de

$$\int_{\Omega} L[\delta u] w \, d\Omega = \int_{\Omega} f w \, d\Omega - \int_{\Omega} F(u) w \, d\Omega \quad (4.3)$$

Quand  $\|\delta u\| < \epsilon$ , on peut considérer que l'on a obtenu la bonne solution.

Cette méthode marche en général mieux, mais nécessite un peu plus de travail "mathématique" car il faut expliciter la fonctionnelle linéaire  $L = \partial_u F$ .

## 4.2 La programmation modulaire

On va vu dans le chapitre précédant que l'on doit résoudre principalement à chaque étape un système linéaire. Le principal travail est d'exprimer l'équation linéaire à résoudre et écrire le programme qui permet de calculer le système élémentaire sur chaque élément. Par exemple si l'équation à résoudre est

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \nabla P \quad \text{avec} \quad \nabla P \quad \text{qui est constant et} \quad \mu = 1, \quad (4.4)$$

alors on a la formulation faible sur l'élément  $\mathbf{K}_k$  :

$$\sum_{j=1}^{N_{no}} u_j^k \int_{\mathbf{K}_k} \frac{\partial \psi_j^k}{\partial x} \frac{\partial \psi_i^k}{\partial x} dx = \nabla P \int_{\mathbf{K}_k} \psi_i^k dx \quad (4.5)$$

sachant que  $u|_{\mathbf{K}_k} = \sum_{j=1}^{N_{no}} u_j^k \psi_j^k$ .

Ce qui donne le programme suivant (cf. les séances précédantes)

```

1  fonction [A_el,F_el] = cal_Melm_1D(iel,gradP,U);
2  //
3      global CONNEC COOR NUMER ADRESS UC Nelt Nno Npt NI;
4      global XG PG Ng;
5  //
6      x = COOR(CONNEC(iel,:),1)
7      mu = 1.;
8      A_el =zeros(Nno,Nno); F_el = zeros(Nno,1);
9
10     jac = (x(2) - x(1))/2.;
11
12     for ig=1:Ng // boucle pour l'integration numerique
13         xg = XG(ig);
14     //
15         [FP,DxiFP] = P2(xg);
16         DxFP = DxiFP/jac;
17
18         for i=1:Nno
19             F_el(i) = F_el(i) + PG(ig)*gradP*FP(i)*jac;
20             for j=1:Nno
21                 A_el(i,j) = A_el(i,j) + mu* PG(ig) * DxFP(j) * DxFP(i) * jac;
22             end;
23         end;
24     end;
25 endfunction
26

```

où les informations concernant le maillage et les points de Gauss sont données par des variables globales (Lignes 3-4).

Les arguments en entrée sont le numéro de l'élément `iel`, le second membre `gradP`, et la solution `U` (ici on ne s'en sert pas, mais c'est utile pour les problèmes non linéaires). En sortie, on a la matrice élémentaire `A_el` et le second membre `F_el`.

Le calcul de la solution se fera par l'appel

```
U = cal_sol_lin(cal_Melm_1D,gradP,U);
```

où `cal_sol_lin` est la fonction suivante qui permet de résoudre tous les problèmes linéaires

```
//  calcule U dans le cas lineaire
//  a partir de Fext  et la fonction cal_Melm
//
function U = cal_sol_lin(cal_Melm,Fext,U)
//
  global CONNEC COOR NUMER ADRESS UC Nelt Nno Npt NI;
  global XG PG Ng;

  [A,F]= assemblage(cal_Melm,Fext,U);

  M11 = A(1:NI,1:NI);
  FI = F(1:NI);
  M12 = A(1:NI,NI+1:$);
  FI = FI - M12*UC;

  [h,rk] = lufact(M11);
  UI = lusolve(h,FI);
  ludel(h);
  U = [UI ; UC];

endfunction
```

Cette fonction appelle la fonction `assemblage` qui calcule les matrices élémentaires à l'aide de la fonction passée en argument de `cal_Melm` en faisant une boucle sur tous les élément afin d'obtenir la matrice globale `A` et le second membre `F`.

Si on change d'équation, il suffit d'écrire une autre fonction de la forme `cal_Melm_1D` et d'appeler `cal_sol_lin` en mettant ce nouveau nom comme argument.

### 4.3 Les exercices.

#### Objectifs :

- ⇒ Montrer que si on a les fonctions qui font l'assemblage, le maillage, on peut passer d'un problème à l'autre en écrivant seulement des petits programmes qui calculent le système élémentaire.
- ⇒ Donner quelques algorithmes permettant de résoudre des problèmes non linéaires





# Chapitre 5

## Séance 5 : Les éléments finis mixtes - Version provisoire

### 5.1 Notations

Le tenseur des taux de déformation (gradient symétrisé des vitesses) :

$$\dot{\epsilon}(u) = \frac{1}{2} (\nabla u^T + \nabla u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

sachant que le tenseur du gradient des vitesses s'écrit :

$$\nabla u = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy

$$\sigma = \tau - p\mathbf{I}$$

où  $p$  est la pression et  $\tau$  le tenseur des extra-contraintes. La forme générale de  $\tau$  est la suivante :

$$\tau = 2\mu(|\dot{\epsilon}(u)|) \dot{\epsilon}(u)$$

où  $|\dot{\epsilon}(u)|$  désigne le second invariant du tenseur  $\dot{\epsilon}(u)$  défini par

$$|\dot{\epsilon}(u)| = 2 \dot{\epsilon}(u) : \dot{\epsilon}(u)$$

Le “:” est le produit dyadique d'un tenseur symétrique :

$$(T_{ij}) : (S_{ij}) = T_{ij}S_{ji} = T_{ij}S_{ij}$$

### 5.2 Le problème de Stokes en 2D

On va étudier le problème de Stokes sur un domaine  $\Omega$  ( $\Gamma$  est la frontière) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma + f &= 0 \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$\sigma = 2\mu\dot{\epsilon}(u) - p\mathbf{I} \tag{5.1}$$

qui s'écrit en 2D

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix} - p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned} \sigma \cdot n &= \mathbf{g} \quad \text{sur } \Gamma_N \\ u &= u^* \quad \text{sur } \Gamma_D \end{aligned}$$

La formulation faible s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\mu \dot{\epsilon}(u) : \dot{\epsilon}(w) \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot w \, d\Omega &= \int_{\Omega} f w \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} w \, d\Gamma \quad \forall w \in V \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot u \, d\Omega &= 0 \quad \forall q \in Q \end{aligned}$$

où  $V$  et  $Q$  sont les espaces des fonctions tests.

La notation  $\sigma : \tau$  signifie en dimension 2 :

$$\sigma : \tau = \sigma_{xx}\tau_{xx} + \sigma_{xy}\tau_{xy} + \sigma_{zz}\tau_{zz}$$

### 5.2.1 La formulation continue

On introduit dans la suite les formes bilinéaires suivantes définies dans  $V \times Q$

$$\begin{aligned} a(u, w) &= \int_{\Omega} 2\mu \dot{\epsilon}(u) : \dot{\epsilon}(w) \, d\Omega \\ b(u, q) &= - \int_{\Omega} q \nabla \cdot u \, d\Omega \end{aligned}$$

La forme faible du problème de Stokes avec conditions aux limites de type Dirichlet en vitesse s'écrit sous la forme générale

$$\begin{aligned} a(u, w) + b(w, p) &= (f, w) \quad \forall w \in V \\ b(u, q) &= 0 \quad \forall q \in Q \end{aligned}$$

qui est la formulation générale des problèmes mixtes.

### 5.2.2 La formulation en terme de point-selle

Si on considère la fonctionnelle Lagrangienne

$$\mathcal{L}(v, q) = \frac{1}{2}a(v, v) + b(v, q) - (f, v) \quad , \quad v \in V \quad , \quad q \in Q, \quad (5.2)$$

la solution  $(u, p)$  du problème de Stokes est le point-selle de cette fonctionnelle

$$\mathcal{L}(u, p) = \min_{v \in V} \max_{q \in Q} \mathcal{L}(v, q) \quad (5.3)$$

Dans cette démarche  $p$  est plutôt vue comme le multiplicateur de Lagrange associé la contrainte de divergence nulle.

### 5.2.3 La formulation discrète

La formulation discrète consiste à approcher les deux espaces  $V$  et  $Q$  par des espaces discrets  $V_h$  et  $Q_h$  et le problème discret s'écrit alors

$$a(u_h, w_h) + b(w_h, p) = (f, w_h) \quad \forall w_h \in V_h \quad (5.4)$$

$$b(u_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (5.5)$$

Les espaces d'approximation  $V_h$  et  $Q_h$  étant de dimension finie cette formulation mène à un système linéaire que l'on peut résoudre à condition qu'il soit inversible.

Il faut noter que la condition d'incompressibilité discrétisée (5.5) n'est pas équivalente à  $\nabla \cdot u_h = 0$ .

Il y aussi une condition de compatibilité (condition LBB) entre les deux espace discrétisés  $V_h$  et  $Q_h$  pour que la méthode de résolution soit stable numériquement :

$$\inf_{p_h \in Q_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{\int_K p_h \nabla \cdot v_h \, d\Omega}{\|p_h\| \|w_h\|} \geq \beta > 0 \quad (5.6)$$

On peut changer la formulation discrète pour obtenir une formulation "stabilisée" afin de prendre une interpolation identique pour la pression et la vitesse.

Dans la suite, on enlève l'indice  $h$ , car ne travaille que dans les espaces discrétisés.

### 5.2.4 La formulation algébrique

Soit  $n_u$  et  $n_p$  les dimensions des espaces  $V_h$  et  $Q_h$ , on a

$$u = \sum_{i=1}^{n_u} u_i \phi_i^u \quad ; \quad p = \sum_{i=1}^{n_p} p_i \phi_i^p \quad (5.7)$$

En dimension 2, il y a donc  $2n_u + n_p$  degrés de liberté et le système linéaire associé au système (5.4-5.5) prend la forme suivante

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

avec

$$A_{ij} = a(\phi_j^u, \phi_i^u) \quad , \quad B_{ij} = a(\phi_j^u, \phi_i^p) \quad , \quad F_i = (f, \phi_i^u)$$

où  $A$  est une matrice  $2 n_u \times 2 n_u$  symétrique définie positive tandis que  $B$  est une matrice rectangle de dimension  $2 n_p \times n_u$ . On montre que la condition de compatibilité entre les éléments pour  $u$  et  $p$  est équivalente à la condition algébrique  $\ker B^T = 0$ .

## 5.3 Les éléments mixtes utilisés

On va donc avoir un élément différent pour la vitesse et la pression afin de vérifier la condition de compatibilité. La pression n'a pas besoin d'être continue à la frontière de l'élément. En effet une pression discontinue permet d'avoir la conservation locale de l'incompressibilité car les fonctions de formes sont nulles en dehors de l'élément.

Il faut noter que la pression peut-être discontinue d'un élément à l'autre si on prend  $\mathbf{P}_0$ . Le symbol + va signifier que l'on utilise des fonctions bulles pour augmenter le nombre d'inconnues en vitesse.

Les éléments  $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0$  ne vérifient pas la condition de compatibilité, ils peuvent parfois donner de bon résultat pour la vitesse, mais en général la pression n'est pas bien calculée. Si on utilise des mauvais éléments, on voit apparaître des oscillations sur les solutions.

### 5.3.1 Quelques exemples pour les triangles

- l'élément  $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0$  (voir la figure 5.1a).
- l'élément  $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$  (voir la figure 5.1b) est appelé *élément de Taylor-Hood*
- l'élément  $\mathbf{P}_1^+ - \mathbf{P}_1$  (voir la figure 5.1c) est appelé *mini-élément*. Il a une fonction bulle cubique. En 2D, il contient 8 degrés de liberté en vitesse et 3 en pression.

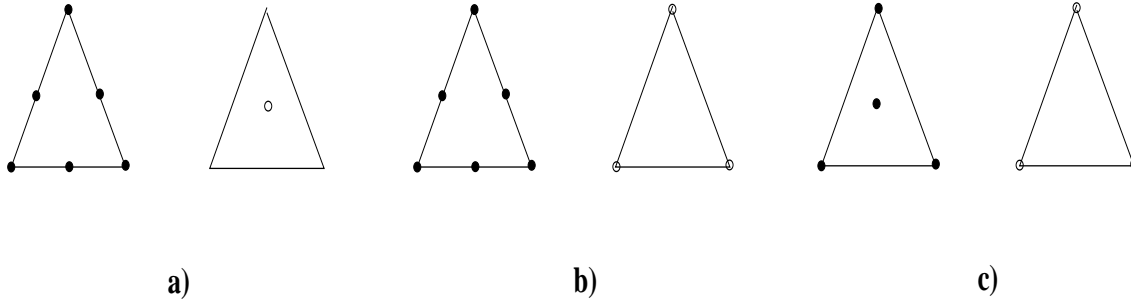


FIG. 5.1 – Eléments Mixtes pour un maillage de Triangles : points de discrétisation pour la vitesse (●) et la pression (○).

### 5.3.2 Quelques exemples pour les quadrangles

- l'élément  $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{P}_0$  (voir la figure 5.2a).
- l'élément  $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1$  (voir la figure 5.2b) est aussi appelé *élément de Taylor-Hood*

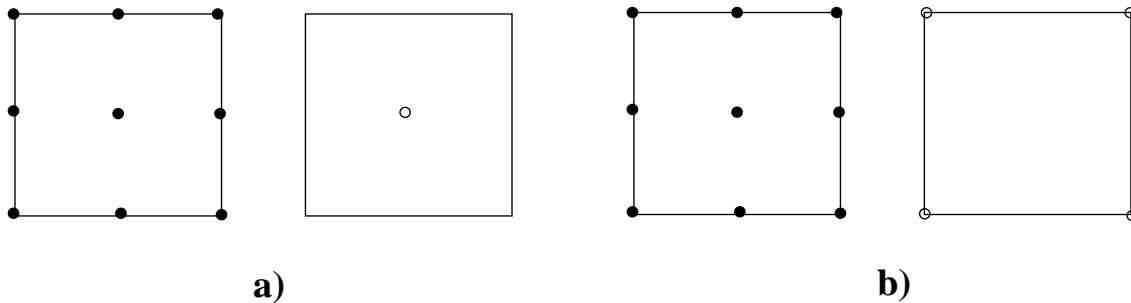


FIG. 5.2 – Eléments Mixtes pour un maillage de Quadrangles : points de discrétisation pour la vitesse (●) et la pression (○).

### 5.3.3 Les éléments bulles

Pour rendre compatible des éléments qui ne vérifient pas la condition LBB, l'idée est d'augmenter le nombre de degré de liberté de la vitesse. On va rajouter une fonction d'interpolation appelée "bulle" valant 1 au barycentre de l'élément et 0 sur les bords. Sur l'élément de référence chaque composante vitesse va s'écrire

$$\sum_{i=1}^{\text{Nno\_u}} u_i L_i(\xi, \eta) + \alpha \beta(\xi, \eta) \quad (5.9)$$

où  $\text{Nno\_u}$  désigne le nombre de degré de liberté en vitesse sur l'élément.

Les éléments bulles les plus courants sont l'élément de Crouzeix-Raviart  $\mathbf{P}_2^+ - \mathbf{P}_{-1}$  ( $\mathbf{P}_{-1}$  signifie que l'on prend des pressions discontinues); le mini élément  $\mathbf{P}_1^+ - \mathbf{P}_1$ .

Pour un élément  $\mathbf{P}_1$ , la fonction bulle va s'écrire

$$\beta(\xi, \eta) = 27 (1 - \xi - \eta) \xi \eta \quad (5.10)$$

car les coordonnées du barycentre sont  $(1/3, 1/3)$ . Il faut remarquer que  $\alpha$  n'est pas la vitesse au barycentre car les autres fonctions  $L_i$  ne sont pas nulles en ce point.

En rajoutant une bulle à un élément, on l'aide à passer la condition de compatibilité, on l'aide à passer les conditions de stabilité sans augmenter le coût de résolution. En effet les bulles peuvent être éliminées par un procédé de condensation (voir la section mise en oeuvre).

## 5.4 Mise en oeuvre pratique

On va présenter une manière de procéder qui n'est pas celle qui va donner le code le plus efficace, mais qui est la plus simple à expliquer pour une initiation.

En effet, si on a `Nelt` éléments, on va avoir affaire aux différents tableaux suivant :

- Le maillage va être définie comme d'habitude par la matrice de connectivité `CONNEC`, le nombre de noeuds par élément `Nno`. Les coordonnées des `Npt` sommets du maillage se trouve dans la matrice `COOR`.
- De la même manière les coordonnées des `Npt_u` points `COOR_u` où se trouvent les degré de liberté en vitesse vont être repérée grâce à une matrice de connectivité `CONNEC_u`. Le nombre de degré de liberté par élément est noté `Nno_u`.
- On a aussi pour la pression `Npt_p`, `Nno_p`, `CONNEC_p` et `COOR_p`.

Il est vrai que dans la pratique tous ces tableaux peuvent se déduire les uns des autres car les sommets du maillage correspondent aussi aux noeuds où se trouve les degrés de liberté.

On va utilisé les matrices `CONNEC_u` et `CONNEC_p` pour contruire la matrice `NUMER` et `ADRESS`.

La taille de ces matrices est dans le cas 2D

- $2 \text{ Npt\_u} + \text{ Npt\_p}$  pour `NUMER`.
- `Nelt` x  $(2 \text{ Nno\_u} + \text{ Nno\_p})$  pour `ADRESS`.

Lors de la formation de ces matrices, on détermine aussi le nombre total d'inconnues `NI` (on note le nombre total de degrés de liberté par `Ndof = 2 \text{ Npt\_u} + \text{ Npt\_p}`).

A partir de là, on procède comme auparavant

- on utilise `CONNEC` et `COOR` pour calculer le jacobien du passage de l'élément courant à l'élément de référence.
- laa matrice `ADRESS` sert à faire l'assemblage et `NUMER` à pouvoir tracer les solutions.

## 5.5 Calcul de la matrice élémentaire

Sur chaque élément, on a une approximation de  $u$  et  $p$  sous la forme suivante :

$$u|_{\mathbf{K}_k} = \sum_{j=1}^{\text{Nno\_u}} u_j^k \psi_j^u \quad ; \quad p|_{\mathbf{K}_k} = \sum_{j=1}^{\text{Nno\_p}} p_j^k \psi_j^p$$

Sur l'élément, on obtient le système local

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u_x] \\ [u_y] \\ [p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$K_{11} = \left( \int_{\Omega} \mu \left( 2 \frac{\partial \psi_j^u}{\partial x} \frac{\partial \psi_i^u}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j^u}{\partial y} \frac{\partial \psi_i^u}{\partial y} \right) dx dy \right)_{ij} \quad ; \quad K_{12} = \left( \int_{\Omega} \mu \frac{\partial \psi_j^u}{\partial x} \frac{\partial \psi_i^p}{\partial y} dx dy \right)_{ij}$$

$$\begin{aligned}
K_{21} &= K_{12}^T ; \quad K_{22} = \left( \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial \psi_j^u}{\partial x} \frac{\partial \psi_i^u}{\partial x} + 2 \frac{\partial \psi_j^u}{\partial y} \frac{\partial \psi_i^u}{\partial y} \right) dx dy \right)_{ij} \\
K_{13} &= \left( - \int_{\Omega} \psi_j^p \frac{\partial \psi_i^u}{\partial x} dx dy \right)_{ij} ; \quad K_{23} = \left( - \int_{\Omega} \psi_j^p \frac{\partial \psi_i^u}{\partial y} dx dy \right)_{ij} \\
K_{31} &= K_{13}^T ; \quad K_{32} = K_{23}^T
\end{aligned}$$

et

$$F_1 = \left( \int_{\Omega} f_x \psi_i^u d\Omega \right)_i ; \quad F_2 = \left( \int_{\Omega} f_y \psi_i^u d\Omega \right)_i$$

Ces intégrales sont évaluées sur l'élément de référence par le changement de variables approprié.

## 5.6 La condensation de la fonction "bulle"

Pour expliquer la condensation, on peut partir que l'expression suivante de la matrice élémentaire sur un élément  $\mathbf{K}_k$

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A_{\beta} & B_{\beta} \\ B^T & B_{\beta}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ U_{\beta} \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F_{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

qui est une expression un peu plus compact que l'expression (5.5).  $V_b$  est le vecteur contenant les composantes des vitesses  $(\alpha_x, \alpha_y)$ ,  $U = ([u_x], [u_y])$ . La forme particulière de (5.11) vient du fait que  $\beta$  s'annule sur la frontière de l'élément et  $\int_K \nabla v : \nabla \beta d\Omega = 0$  si  $v \in \mathbf{P}_1$ .

On élimine  $V_{\beta}$  de ce système et on obtient le système élémentaire de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -B_{\beta}^T A_{\beta}^{-1} B_{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ -B_{\beta}^T A_{\beta}^{-1} F_{\beta} \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

## 5.7 Les exercices.

**Objectifs :**

⇒ Utiliser les éléments mixtes pour résoudre le problème de Stokes