



UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

MÉMOIRE MASTER 2 DE MATHÉMATIQUES

**Equation de Klein-Gordon linéaire et
faiblement non linéaire étude en temps
grand, et quelques exemples de
retournement temporel**

Rédigé par :
Sokly HENG

Encadré par :
Stéphane JUNCA
Bernard ROUSSELET

18 juin 2009

Table des matières

Remerciements	3
1 Présentation du projet	4
2 Etude du problème linéaire	5
2.1 Solution du problème linéaire avec la condition de Dirichlet homogène	5
2.1.1 Solution particulière d'un mode propre	6
2.1.2 Solution générale	6
2.1.3 Solution avec le second membre	7
2.2 Energie du système linéaire	7
2.3 Décroissance stricte de l'énergie dûe à la condition d'impédance	8
2.4 Unicité de la solution	12
2.5 Régularité de la solution	13
2.6 Discrétisation totale par un schéma aux différences finies . . .	13
2.6.1 Schéma explicite centré sans conditions aux limites . .	13
2.6.2 Initialisation du schéma	14
2.6.3 Discrétisation de la condition aux limites	15
2.7 Consistance du schéma	16
2.8 Condition de stabilité	17
2.8.1 Analyse de stabilité par la méthode de Fourier	17
2.8.2 Analyse de stabilité par la méthode d'énergie	17
2.9 Convergence du schéma	20
3 Etude du problème non linéaire	22
3.1 Discrétisation totale par un schéma aux différences finies . . .	23
3.1.1 Schéma explicite centré sans conditions aux limites . .	23
3.1.2 Initialisation du schéma	23
3.1.3 Discrétisation de la condition aux limites	23
3.2 Comportement de la solution non linéaire	24
3.3 Développement simple d'un mode propre	25

3.4	Développement avec une phase	30
3.5	Développement double échelle	36
4	Etude du problème retourné	38
4.1	Etude du problème retourné linéaire	38
4.1.1	Schéma explicite centré sans conditions aux limites	39
4.1.2	Initialisation du schéma	39
4.1.3	Discrétisation de la condition aux limites	39
4.1.4	Comportement de la solution retourné linéaire	40
4.2	Etude du problème retourné non linéaire	41
4.2.1	Schéma explicite centré sans conditions aux limites	41
4.2.2	Initialisation du schéma	41
4.2.3	Discrétisation de la condition aux limites	42
4.2.4	Comportement de la solution retourné non linéaire	42
5	Résultats numériques	44
5.1	Résultats du problème linéaire	45
5.1.1	Résultats du problème avec la condition initiale (5.1)	45
5.1.2	Résultats du problème avec la condition initiale (5.2)	48
5.2	Résultats du problème non linéaire	50
5.2.1	Résultats du problème non linéaire avec la condition initiale (5.1)	50
5.2.2	Résultats du problème non linéaire avec la condition initiale (5.2)	54
6	Conclusion	57
	Bibliographie	57
	Annexe	59

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes responsables de mémoire de recherche Bernard ROUSSELET et Stéphane JUNCA pour leurs bons conseils et leurs aides depuis le début de ce projet.

Je remercie également au Service de Coopération et d'Action Culturelle (SCAC), à l'ambassade de France au Cambodge, qui me donne une occasion de poursuivre mes études en France.

Je remercie aussi au Centre International de Mathématiques Pures et Appliqués (CIMPA), qui organise le programme de master de mathématiques dans mon pays, Cambodge.

Finalement, je remercie tous les professeurs du CIMPA et les professeurs au laboratoire J.A. DIEUDONNE pour leurs renseignements.

Chapitre 1

Présentation du projet

L'étude mathématiques et numérique du retournement temporel est le but principal de ce projet. Cette méthode a été inventé par l'équipe des physiciens de Mathias Fink(académie des sciences), avec des applications pour l'imagerie médicale(recherche de tumeur), la détection sous-marine, la télécommunication, etc.

Pour ce stage, on se concentrera sur l'équation de Klein-Gordon en dimension 1 en espace. Plus précisément, on étudie le problème en temps grand. Ce problème est considéré dans un domaine borné $\Omega = [0, T] \times [0, 1]$, $[0, T]$ est l'intervalle de temps et $[0, 1]$ est l'intervalle d'espace. Et on considère ce problème avec la condition aux limites de Dirichlet homogène ou d'impédance. On étudie le problème retourné de la même l'équation dans un autre domaine borné $\Omega' = [T, 2T] \times [0, 1]$ avec la condition aux limites de Dirichlet non homogène. On associe à l'équation de Klein-Gordon l'opérateur linéaire K

$$Ku = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$

On travaille tout d'abord sur le problème linéaire $Ku = 0$. On se donne les conditions initiales(le terme source) $l_0(x) = u(0, x)$, $l_1(x) = \partial_t u(0, x)$. On cherche la solution analytique associée en utilisant la technique de séparation des variables, et la solution approchée numérique en utilisant un schéma aux différences finies. Pour le problème non linéaire $Ku + \epsilon u^3 = 0$, on utilise des développements asymptotiques pour chercher la solution approchée. Ensuite, on travaille sur le problème retourné linéaire $Kv = 0$ et non linéaire $Kv + \epsilon v^3 = 0$. Avec les conditions initiales $v(T, x) = u(T, x)$, $\partial_t v(T, x) = \pm \partial_t u(T, x)$, on cherche théoriquement et numériquement la solution du problème retourné. On compare la solution du problème retourné à l'instant final $2T$, $v(2T, x)$ avec le terme source à l'instant initial 0, $u(0, x)$. Finalement, on donne quelques résultats théoriques et numériques des problèmes ci-dessus.

Chapitre 2

Etude du problème linéaire

On étudie le problème linéaire associé à l'équation de Klein-Gordon dans $\Omega = [0, T] \times [0, 1]$ avec les conditions initiales très régulières $l_0(x), l_1(x)$

$$\begin{cases} Ku = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ u(0, x) = l_0(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = l_1(x) & , \forall x \in [0, 1] \end{cases} \quad (2.1)$$

On s'intéresse à étudier ce problème avec la condition aux limites de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} u(t, 0) = 0 & , \forall t \in [0, T] \\ u(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.2)$$

ou avec la condition aux limites d'impédance ($0 < z < 1$)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = +z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) = -z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1 Solution du problème linéaire avec la condition de Dirichlet homogène

On cherche explicitement la solution du problème linéaire (2.1) avec la condition de Dirichlet homogène (2.2) en utilisant la technique de séparation des variables.

Remarque. La technique de séparation de variables ne donne pas la solution explicite du problème linéaire (2.1) avec la condition d'impédance (2.3), exceptée la condition identiquement nulle.

2.1.1 Solution particulière d'un mode propre

Soit $u(t, x) = v(t)w(x)$ une solution particulière du problème linéaire (2.1) avec la condition de Dirichlet homogène(2.2). On a d'après (2.1)

$$\begin{aligned}Ku &= w \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + vw = 0 \\ \frac{1}{w} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + v \right) = -\mu^2\end{aligned}$$

On trouve qu'avec $\omega^2 = 1 + \mu^2$

$$\begin{aligned}w(x) &= e^{i\mu x} = a \sin(\mu x) + b \cos(\mu x) \\ v(t) &= e^{i\omega t} = c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t) = \cos(\omega t + \varphi), \text{ où } c^2 + d^2 = 1\end{aligned}$$

En utilisant la condition de Dirichlet homogène (2.2), on en déduit que $b = 0$ et $\mu = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. Donc on trouve une solution particulière de (2.1)-(2.2)

$$u(t, x) = a \sin(k\pi x) \cos(\omega t + \varphi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

avec la relation de dispersion

$$\omega^2 = 1 + k^2\pi^2 \quad (2.5)$$

et avec la condition initiale associée

$$\begin{cases} l_0(x) = a \sin(k\pi x) \cos \varphi \\ l_1(x) = -\omega a \sin(k\pi x) \sin \varphi \end{cases} \quad (2.6)$$

2.1.2 Solution générale

La solution générale du problème linéaire (2.1)-(2.2) est une combinaison linéaire infinie des modes propres. Donc elle s'écrit sous la forme

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x) \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (2.7)$$

avec la relation de dispersion

$$\omega_k^2 = 1 + k^2\pi^2 \quad (2.8)$$

2.1.3 Solution avec le second membre

On étudie le problème linéaire (2.1) avec la condition de Dirichlet homogène (2.2) et avec le second membre

$$\begin{cases} Ku = g(t, x) & , \forall (t, x) \in \Omega \\ u(0, x) = l_0(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = l_1(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ u(t, 0) = 0 & , \forall t \in [0, T] \\ u(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.9)$$

où $g(t, x) = a_k \sin(k\pi x) \cos(\omega t + \varphi_k)$.

Si $(k, \omega) \notin Sp(K)$, alors la solution particulière de (2.9) s'écrit

$$u(t, x) = \frac{a_k}{-\omega^2 + 1 + k^2\pi^2} \sin(k\pi x) \cos(\omega t + \varphi_k). \quad (2.10)$$

Sinon, il y a résonance et la solution écrit pour $\omega = \omega_k$

$$u(t, x) = \frac{a_k t}{2\omega_k} \sin(k\pi x) \sin(\omega_k t + \varphi_k). \quad (2.11)$$

2.2 Energie du système linéaire

On définit l'énergie du système linéaire (2.1) par

$$E[u](t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^2 \right) dx, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.12)$$

et on pose

$$E_0 = E[u](0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(l_1^2 + (l_0')^2 + l_0^2 \right) dx = \frac{1}{2} (\|l_0\|_{H^1}^2 + \|l_1\|_{L^2}^2)$$

Proposition 2.1. Soient E_1 l'énergie du système linéaire (2.1) avec la condition de Dirichlet homogène (2.2) et E_2 l'énergie du système linéaire (2.1) avec la condition d'impédance (2.3). Alors $\forall t > 0$, on a

$$E_1[u](t) = E_0 \text{ et } E_2[u](t) \leq E_0.$$

Preuve. On multiplie $Ku = 0$ par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre sur $(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + u \right) dx &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^2 \right) dx - \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)_0^1 &= 0 \end{aligned}$$

Pour le système (2.1)-(2.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_1[u](t)) &= 0 \\ \text{donc } \forall t \geq 0, E_1[u](t) &= E_1[u](0) = E_0. \end{aligned}$$

Pour le système (2.1)-(2.3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_2[u](t)) &= -z \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) \right)^2 \right) \leq 0 \\ \text{donc } \forall t \geq 0, E_2[u](t) &\leq E_2[u](0) = E_0. \end{aligned}$$

□

Conjecture 2.2. *La décroissance de l'énergie du problème linéaire (2.1) avec la condition d'impédance (2.3) est exponentielle (comme l'équation des cordes vibrantes) et sans doute pour le problème non linéaire (sous certaines conditions).*

2.3 Décroissance stricte de l'énergie dûe à la condition d'impédance

On étudie le problème linéaire (2.1) avec la condition d'impédance (2.3)

$$\left\{ \begin{array}{ll} Ku = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ u(0, x) = l_0(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = l_1(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = +z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, 1) = -z \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (2.13)$$

où $l_0 \in H^1(0, 1)$ et $l_1 \in L^2(0, 1)$. On veut démontrer que grâce à la condition d'impédance, on a $\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (T, x) dx \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$ et de plus $E(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$.

Formulation variationnelle de (2.13) :

Soit $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times [0, 1])$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \varphi dx dt &= \int_0^T \int_0^1 u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx dt \\ &\quad + \int_0^1 \left(l_0(x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) - l_1(x) \varphi(0, x) \right) dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \varphi dx dt &= \int_0^T \int_0^1 u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx dt \\
&+ \int_0^T \left(u(t, 0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) - u(t, 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 1) \right) dt \\
&+ \frac{1}{z} \int_0^T \left(u(t, 0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) + u(t, 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 1) \right) dt \\
&+ \frac{1}{z} \left(l_0(0) \varphi(0, 0) + l_0(1) \varphi(0, 1) \right)
\end{aligned}$$

donc on a la formulation variationnelle

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^1 u K \varphi dx dt &= \int_0^1 \left(l_1(x) \varphi(0, x) - l_0(x) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) \right) dx \\
&+ \int_0^T \left(u(t, 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 1) - u(t, 0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) \right) dt \\
&- \frac{1}{z} \int_0^T \left(u(t, 0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0) + u(t, 1) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 1) \right) dt \\
&- \frac{1}{z} \left(l_0(0) \varphi(0, 0) + l_0(1) \varphi(0, 1) \right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

L'espace vectoriel de la solution du problème (2.13)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \left\{ u \text{ solution du problème (2.13) au sens faible} \right\} \\
\mathcal{E}^0 &= \left\{ u \in \mathcal{E}, u \in C^0([0, +\infty[, H^1(0, 1)) \cap C^1(]0, +\infty[, L^2(0, 1)) \right\} \\
\mathcal{E}^{k+1} &= \left\{ u \in \mathcal{E}^k, \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{E}^k \right\}
\end{aligned}$$

Lemme 2.3. Soit $Q = [0, 1]^2$, alors $\mathcal{E}^1(Q) \subset H^2(Q)$.

Preuve. si $u \in \mathcal{E}^1$, alors par l'inégalité d'énergie

$$u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \in L_t^\infty L_x^2$$

et si $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{E}^1$, alors $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \in L_t^\infty L_x^2$. donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_t^\infty L_x^2$ car $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u$.
Donc dans \mathcal{E}^1 ; $u, \nabla u, \nabla^2 u \in L_t^\infty L_x^2 \subset H^2$, et il y a une trace forte(en $x = 0, 1$)
pour $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$. \square

Lemme 2.4. Si $l_0, l_1 \in C_c^\infty(0, 1)$ ou si $l_0, l_1 \in C^\infty(0, 1)$ et vérifié toutes les conditions de compatibilité aux coins, alors $u \in \mathcal{E} \cap C^\infty([0, +\infty[\times [0, 1]_x)$.

Preuve. Soient $u, \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{E}$ et $v = \frac{\partial u}{\partial t}$.

En $x = 0, 1$; $\frac{\partial u}{\partial t} = \pm \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0$ fort.

Donc $v(t, 0) = v(t, 1) = 0$ et $\frac{\partial v}{\partial t}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, 1) = 0$, donc dans \mathcal{E}^2 , $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)$ a aussi une trace forte. \square

Théorème 2.5. Pour le problème linéaire avec la condition d'impédance (2.13), on a $\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (T, x) dx \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$ et de plus $E(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$.

Lemme 2.6. Soit $I[u] = \int_0^1 \sum_{x=0,1} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (t, x) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 (t, x) \right) dt$. Si $u \in \mathcal{E}^1$ et $I[u] = 0$, alors $u \equiv 0$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

Preuve du lemme. Soit $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, alors v est la solution du problème $Kv = 0$ avec la condition de Dirichlet homogène ($v(t, 0) = v(t, 1) = 0$), et de Neumann homogène car en $x = 0, 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \pm \frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= \pm \frac{1}{z} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \pm \frac{1}{z} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right) &= \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) = 0 \end{aligned}$$

On va utiliser la méthode des caractéristiques pour montrer que $v = 0$ dans $[0, 1] \times [0, 1]$.

Soient $W = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}$ et $Z = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x}$, alors

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial x} + v = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} + v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - W = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Dans la zone de dépendance $D_0 = \{0 \leq x \leq 1/2, x \leq t \leq 1 - x\}$ et $D_1 = \{1/2 \leq x \leq 1, x \leq t \leq 1 - x\}$, par l'unicité de la solution du système linéaire homogène (2.15), on a $(v, W, Z) = (0, 0, 0)$ dans $D_0 \cup D_1$.

En utilisant le cône de dépendance, on trouve que $v = 0, \forall t \geq 1/2$. Comme l'équation de Klein-Gordon est réversible, on en déduit que $v = 0, \forall t \leq 1/2$.

Donc on trouve que $v = 0$ par tout dans $[0, 1] \times [0, 1]$. On en déduit ensuite que $u(t, x) = u(x)$, donc $Ku = u''(x) - u(x) = 0$ et de plus $u^{(3)}(x) - u'(x) = 0$. Soit $w = \frac{\partial u}{\partial x} = u'(x)$, alors

$$\begin{cases} w''(x) - w(x) = 0 \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

On trouve la solution de (2.16), $w = 0, \forall x \in [0, 1]$. Donc $u(x)$ est constante, et avec $Ku = 0$, on trouve finalement que $u \equiv 0$. \square

Lemme 2.7. Si $u, \frac{\partial u}{\partial t} \in L_t^\infty L_x^2$, alors $u \in Lip_t L_x^2$.

Preuve du lemme.

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u(t+h, x) - u(t, x)|^2 dx &= \int_0^1 \left(\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (s, x) ds \right) dx \\ &\leq |h| \int_0^1 \left(\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (s, x) ds \right) dx \\ &\leq |h| \int_t^{t+h} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (s, x) dx \right) ds \\ &\leq |h| \int_t^{t+h} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 ds \\ &\leq |h|^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 \end{aligned}$$

Donc si $u, \frac{\partial u}{\partial t} \in L_t^\infty L_x^2$, alors $u \in Lip_t L_x^2$. \square

Lemme 2.8. Si $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \in L_t^\infty L_x^2$, i.e $u \in \mathcal{E}^1$, alors $u \in Lip_t H_x^1$.

Et de plus, si $u \in \mathcal{E}^2$, alors $u \in Lip_t H_x^2$.

Preuve du lemme.

$$\begin{aligned} \|u(t+h, x) - u(t, x)\|_{H_x^1}^2 &= \int_0^1 |u(t+h, x) - u(t, x)|^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t+h, x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right|^2 dx \\ \|u(t+h, x) - u(t, x)\|_{H_x^1}^2 &\leq |h|^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 + |h|^2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 \end{aligned}$$

Donc si $u \in \mathcal{E}^1$, alors $u \in Lip_t H_x^1$.

Et de plus on en déduit que si $u \in \mathcal{E}^2$, alors $u \in Lip_t H_x^2$. \square

Preuve du théorème. Soit $u_n(t, x) = u(t + n, x)$ une suite bornée dans \mathcal{E}^2 . Donc u_n est bornée dans $Lip_t H_x^2$, et on peut extraire une sous-suite de u_n , $u_{\varphi(n)} \rightarrow u$ dans $C_t^0 H_x^s$, $\forall s < 2$. De plus, $u \in \mathcal{E}^2$, $I[u] = 0 = \lim I_n[u] = \lim I[u_n]$, donc on a $u \equiv 0$ et

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx \rightarrow \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx$$

$$u \in \mathcal{E}^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in \mathcal{E} \text{ et } u, \frac{\partial u}{\partial t} \in L_t^\infty L_x^2 \Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L_t^\infty L_x^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(Ku) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \in L_t^\infty L_x^2, \text{ d'où } \frac{\partial u_n}{\partial x} \text{ est bornée dans } Lip_t H_x^1,$$

donc $\frac{\partial u_n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}$ dans $C_t^0 H_x^s$, $s < 1$, ce qui suffit pour les traces en $x = 0, 1$.

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t, x) \right)^2 dx \rightarrow \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 dx$$

$$u \in \mathcal{E}^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \in L_t^\infty H_x^1, \text{ ce qui suffit pour passer à la limite 0.}$$

Donc on a $\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (T, x) dx \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$ et de plus $E(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$. \square

2.4 Unicité de la solution

Proposition 2.9. *Le problème linéaire (2.1)-(2.2) admet une solution unique.*

Preuve. Soient u, v , 2 solutions distinctes du problème linéaire (2.1)-(2.2).

Soit $w = u - v$, on a

$$\begin{cases} Kw = K(u - v) = Ku - Kv = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ w(0, x) = l_0(x) - l_0(x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = l_1(x) - l_1(x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ w(t, 0) = u(t, 0) - v(t, 0) = 0 & , \forall t \in [0, T] \\ w(t, 1) = u(t, 1) - v(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Donc w est aussi une solution du problème (2.1)-(2.2) pour la condition initiale $w(0, x) = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = 0$.

D'après la proposition 2.1, on a $E[w](t) = E[w](0) = 0 \Rightarrow \nabla_{t,x} w = (0, 0)$. Donc $\forall (t, x) \in \Omega$, $w(t, x) = w(0, x) = 0$. D'où le résultat annoncé. \square

Proposition 2.10. *Le problème linéaire (2.1)-(2.3) admet aussi une solution unique.*

Preuve. La preuve est identique à celle de la proposition 2.9. \square

2.5 Régularité de la solution

Soit u la solution du problème linéaire (2.1) avec la condition de Dirichlet homogène (2.2). Donc on a les conditions nécessaires de compatibilité, $\forall p \in \mathbb{Z}$, si $u \in C^p([0, +\infty[\times]0, 1])$, alors

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2k \leq p, \quad l_0^{(2k)}(0) = l_0^{(2k)}(1) = 0. \\ \forall j \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2j + 1 \leq p, \quad l_1^{(2j)}(0) = l_1^{(2j)}(1) = 0. \end{aligned}$$

Ces conditions sont suffisantes d'après [Brézis] dernier chapitre.

2.6 Discrétisation totale par un schéma aux différences finies

Définition 2.11 (Définition de L_h^2). *Pour analyser le problème continu (2.1), on le considère comme un problème d'évolution posé dans un espace de Hilbert*

$$L_h^2 = \left\{ u_h = (u_j)_{j=1}^N, \sum_{j=1}^N |u_j|^2 < +\infty \right\}$$

muni de la norme $\|u_h\|^2 = h \sum_{j=1}^N |u_j|^2$ et du produit scalaire $(u_h, v_h) = h \sum_{j=1}^N u_j \bar{v}_j$, h est le pas d'espace et N est le nombre de points de la discrétisation dans $[0, 1]$. L'espace L_h^2 est isomorphe au sous-espace de $L^2(0, 1)$ et le produit scalaire sur L_h^2 coïncide avec le produit scalaire usuel de $L^2(0, 1)$

$$(u_h, v_h) = \int_0^1 u_h(x) v_h(x) dx$$

2.6.1 Schéma explicite centré sans conditions aux limites

Pour résoudre numériquement le problème linéaire (2.1), on discrétise le domaine $\Omega = [0, T] \times [0, 1]$ avec Δt le pas de temps et h le pas d'espace, on note $t^n = n\Delta t$, $x_j = jh$. On approche $u(t^n, x_j)$ par u_j^n , $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^n, x_j)$ par une différence finie centrée d'ordre 2 en temps

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^n, x_j) = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2}$$

et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_j)$ par une différence finie centrée d'ordre 2 en espace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_j) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

Donc on peut approcher le problème linéaire (2.1) par le problème discrétisé ci-dessous

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + u_j^n = 0 \\ u_j^0, u_j^1 \end{cases} \quad (2.17)$$

On prend $\beta = \alpha^2 = \Delta t^2/h^2$, et on un schéma explicite sans condition aux limites

$$u_j^{n+1} = \beta u_{j+1}^n + (2 - 2\beta - \Delta t^2) u_j^n + \beta u_{j-1}^n - u_j^{n-1} \quad (2.18)$$

Ce qui est un schéma centré d'ordre 2 en temps et en espace.

2.6.2 Initialisation du schéma

Pour démarrer le schéma numérique du problème discrétisé (2.17), on a besoin de $(u_j^0)_{j=1\dots N}$ et $(u_j^1)_{j=1\dots N}$. Donc on doit approcher $u(0, x_j) = l_0(x_j)$ et $u(\Delta t, x_j)$. Pour le premier instant, on prend simplement

$$u_j^0 = l_0(jh) \quad (2.19)$$

Pour approcher $u(\Delta t, x_j)$ et avoir l'approximation d'ordre 2 en temps de $\frac{\partial u}{\partial t}$, on utilise le développement de Taylor ci-dessous

$$u(\Delta t, x_j) = u(0, x_j) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x_j) + O(\Delta t^3)$$

en utilisant l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x_j) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, x_j) - u(0, x_j)$, on a

$$u(\Delta t, x_j) = u(0, x_j) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_j) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, x_j) - u(0, x_j) \right) + O(\Delta t^3)$$

ce qui conduit à l'approximation, avec $\beta = \alpha^2 = \Delta t^2/h^2$

$$u_j^1 = u_j^0 + \Delta t l_1(jh) + \frac{\beta}{2} (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) - \frac{\Delta t^2}{2} u_j^0 \quad (2.20)$$

Remarque. Pour le problème avec la condition d'impédance, on utilise

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) &= \frac{u(0, 2h) - 2u(0, h) + u(0, 0)}{h^2} + O(h^2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 1) &= \frac{u(0, 1 - 2h) - 2u(0, 1 - h) + u(0, 1)}{h^2} + O(h^2)\end{aligned}$$

donc on prend en $x = 0$ et $x = 1$

$$\begin{aligned}u_0^1 &= u_0^0 + \Delta t l_1(0) + \frac{\beta}{2} (u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0) - \frac{\Delta t^2}{2} u_0^0 \\ u_N^1 &= u_N^0 + \Delta t l_1(1) + \frac{\beta}{2} (u_{N-2}^0 - 2u_{N-1}^0 + u_N^0) - \frac{\Delta t^2}{2} u_N^0\end{aligned}$$

2.6.3 Discrétisation de la condition aux limites

Discrétisation de la condition de Dirichlet homogène

On prend simplement pour la condition de Dirichlet homogène (2.2)

$$u_0^n = u_N^n = 0 \quad (2.21)$$

Discrétisation de la condition d'impédance

On utilise l'approximation centrée d'ordre 2 en temps pour approcher $\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_j)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_j) = \frac{u(t^n + \Delta t, x_j) - u(t^n - \Delta t, x_j)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

et l'approximation centrée d'ordre 2 en espace pour approcher $\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_j)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_j) = \frac{u(t^n, x_j + h) - u(t^n, x_j - h)}{2h} + O(h^2)$$

En $x = 0$, on a d'après la formule de Taylor et l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, 0) &= \frac{u(t^n, h) - u(t^n, 0)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, 0) + O(h^2) \\ &= \frac{u(t^n, h) - u(t^n, 0)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \right)(t^n, 0) + O(h^2)\end{aligned}$$

et on a d'après (2.3), avec $\alpha = \Delta t/h$

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^{n-1}}{2\Delta t} = z \left(\frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{u_0^{n+1} - 2u_0^n + u_0^{n-1}}{\Delta t^2} + u_0^n \right) \right)$$

$$(\alpha + z) u_0^{n+1} = 2z\alpha^2 u_1^n + z(2 - 2\alpha^2 - \Delta t^2) u_0^n + (\alpha - z) u_0^{n-1}$$

Donc en $x = 0$, on prend le schéma

$$u_0^{n+1} = (2z\alpha^2 u_1^n + z(2 - 2\alpha^2 - \Delta t^2) u_0^n + (\alpha - z) u_0^{n-1}) / (\alpha + z) \quad (2.22)$$

et en $x = 1$, on prend le schéma

$$u_N^{n+1} = (2z\alpha^2 u_{N-1}^n + z(2 - 2\alpha^2 - \Delta t^2) u_N^n + (\alpha - z) u_N^{n-1}) / (\alpha + z) \quad (2.23)$$

2.7 Consistance du schéma

On se donne u régulière une solution du problème linéaire (2.1). On note par $\bar{u}_j^n = u(t^n, x_j)$, et on définit l'erreur de troncature

$$\epsilon_j^n = \frac{\bar{u}_j^{n+1} - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{h^2} + \bar{u}_j^n \quad (2.24)$$

Définition 2.12. On dit que le schéma est consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 ($\epsilon_j^n \rightarrow 0$) lorsque Δt et h tendent vers 0.

Le schéma est consistant à l'ordre m en temps et k en espace si l'erreur de troncature est d'ordre m en temps et k en espace, c'ad $\epsilon_j^n = O(\Delta t^m + h^k)$, lorsque Δt et h tendent vers 0.

Proposition 2.13. Le schéma (2.18) est consistant à l'ordre 2 en temps et en espace, $\epsilon_j^n = O(\Delta t^2 + h^2)$.

Preuve. Si u est régulière, on peut faire des développements de Taylor

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^n, x_j) + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_j) + O(h^2)$$

d'où

$$\begin{aligned} \epsilon_j^n &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t^n, x_j) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_j) + u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2 + h^2) \\ &= Ku + O(\Delta t^2 + h^2) \end{aligned}$$

u vérifie $Ku = 0$, donc on en déduit que $\epsilon_j^n = O(\Delta t^2 + h^2)$. \square

2.8 Condition de stabilité

2.8.1 Analyse de stabilité par la méthode de Fourier

On présente une première analyse de stabilité valable pour les domaines non bornés ou pour les solutions périodiques. Soient, $u_j^n = a_n e^{ikx_j}$ et $u_j^{n-1} = b_n e^{ikx_j}$. Soit $\theta = kh/2$, on a d'après le schéma (2.18)

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4\beta \sin^2 \theta - \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 4\beta \sin^2 \theta - \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ matrice d'amplification}$$

Le polynôme caractéristique de A ,

$$p^2 - (2 - 4\beta \sin^2 \theta - \Delta t^2)p + 1 = 0$$

$$\Delta' = (1 - 2\beta \sin^2 \theta - \Delta t^2/2)^2 - 1$$

◦ Si $\Delta' > 0$, donc il existe 2 racines distinctes p_1, p_2 telles que $p_1 p_2 = 1$, c'est-à-dire $|p_1| > 1$ ou $|p_2| > 1$, donc le schéma est instable dans ce cas.

◦ Si $\Delta' \leq 0$, on a, $2\beta \sin^2 \theta \leq 2 - \Delta t^2/2$, donc $\beta \leq 1 - \Delta t^2/4$.

On a 2 racines complexes p_1, p_2 telles que,

$$|p|^2 = |p_1 p_2| = 2(1 - 2\beta \sin^2 \theta - \Delta t^2/2)^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow |p| \leq 1.$$

Donc le schéma (2.18) est stable sous la condition CFL, $\alpha \leq (1 - \Delta t^2/4)^{1/2}$

2.8.2 Analyse de stabilité par la méthode d'énergie

L'énergie discrète du système discrétisé (2.17) est défini par

$$E_h^{n+1/2} = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N \left\| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \left(\frac{-u_{j+1}^n + 2u_j^n - u_{j-1}^n}{h^2} + u_j^n \right) \quad (2.25)$$

Si le problème discrétisé (2.17) est posé avec la condition de Dirichlet homogène (2.21), on a la conservation d'énergie $E_h^{n+1/2} = E_h^{n-1/2}$ et l'énergie discrète (2.25) devient simplement

$$E_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{2} (u_h^n, u_h^{n+1}) + \frac{1}{2} (Au_h^n, u_h^{n+1}) \quad (2.26)$$

où A est la matrice tridiagonale

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On cherche la condition suffisante pour que $E_h^{n+1/2}$ soit positive.

On sait que

$$(u_h^n, u_h^{n+1}) = \frac{1}{4} (u_h^{n+1} + u_h^n, u_h^{n+1} + u_h^n) - \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right)$$

et

$$(Au_h^n, u_h^{n+1}) = \frac{1}{4} (A(u_h^{n+1} + u_h^n), u_h^{n+1} + u_h^n) - \frac{\Delta t^2}{4} \left(A \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right)$$

Donc on a

$$E_h^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4} \|A\| \right) \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{8} (1 + \|A\|) \|u_h^{n+1} + u_h^n\|^2$$

La condition suffisante pour que $E_h^{n+1/2} \geq 0$,

$$\frac{\Delta t^2}{4} \|A\| \leq 1 - \frac{\Delta t^2}{4} \quad (2.27)$$

La norme matricielle de A

$$\begin{aligned} (Au_h^n, u_h^n) &= \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^N (2|u_j^n|^2 - 2u_j^n u_{j-1}^n) h \\ &\leq \frac{4}{h^2} \sum_{j=1}^N |u_j^n|^2 h = \frac{4}{h^2} \|u_h^n\|^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\|A\| \leq 4/h^2$, et on trouve finalement la condition de stabilité CFL d'après (2.27), $\alpha = \Delta t/h \leq (1 - \Delta t^2/4)^{1/2}$

Proposition 2.14. *Sous la condition CFL, $\alpha < (1 - \Delta t^2/4)^{1/2}$, la solution $u_h^n = (u_j^n)_{j=1\dots N}$ du problème discrétisé (2.17) avec la condition de Dirichlet homogène (2.21) est majorée par*

$$\|u_h^n\| \leq \|u_h^0\| + C_\alpha T \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2}.$$

où C_α est une constante qui dépend de α .

Preuve. Si le problème (2.17) est posé avec la condition de Dirichlet homogène (2.21), on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 - \alpha^2 - \Delta t^2/4) \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right\|^2 &\leq E_h^{n+1/2} = E_h^{1/2} \\ \text{on prend } C_\alpha &= (2/(1 - \alpha^2 - \Delta t^2/4))^{1/2}, \text{ on a} \\ \|u_h^{n+1} - u_h^n\| &\leq C_\alpha \Delta t \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|u_h^n\| &\leq \|u_h^{n-1}\| + \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \\ &\leq \|u_h^{n-1}\| + C_\alpha \Delta t \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2} \\ &\leq \|u_h^0\| + C_\alpha n \Delta t \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

D'où, $\|u_h^n\| \leq \|u_h^0\| + C_\alpha T \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2}$ □

Estimation d'énergie pour le schéma avec le terme source

Proposition 2.15. *Soit $u_h^n = (u_j^n)_{j=1\dots N}$ la solution du problème*

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + u_j^n = g_j^n \\ u_j^0, u_j^1 \\ u_0^n, u_N^n = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Alors sous la condition CFL, $\alpha < (1 - \Delta t^2/4)^{1/2}$, et avec $C_\alpha = (2/(1 - \alpha^2 - \Delta t^2/4))^{1/2}$, on a

$$\left(E_h^{n+1/2}\right)^{1/2} \leq \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2} + \frac{C_\alpha}{2} \Delta t \sum_{k=1}^n \|g_h^k\|.$$

Preuve. On multiplie $\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + u_j^n = g_j^n$ par $(u_j^{n+1} - u_j^{n-1})h$ et on fait la somme pour $j = 1 \dots N$, on a

$$\begin{aligned} E_h^{n+1/2} - E_h^{n-1/2} &= \frac{1}{2} (g_h^n, u_h^{n+1} - u_h^{n-1}) \\ &\leq \frac{1}{2} \|g_h^n\| (\|u_h^{n+1} - u_h^n\| + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|) \end{aligned}$$

et d'après la proposition précédente, on sait que

$$\begin{aligned} \|u_h^{n+1} - u_h^n\| &\leq C_\alpha \Delta t \left(E_h^{n+1/2} \right)^{1/2} \\ \Rightarrow \|u_h^{n+1} - u_h^n\| + \|u_h^n - u_h^{n-1}\| &\leq C_\alpha \Delta t \left(\left(E_h^{n+1/2} \right)^{1/2} + \left(E_h^{n-1/2} \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\left(E_h^{n+1/2} \right)^{1/2} - \left(E_h^{n-1/2} \right)^{1/2} \leq \frac{C_\alpha}{2} \Delta t \|g_h^n\|$$

$$\text{D'où, } \left(E_h^{n+1/2} \right)^{1/2} \leq \left(E_h^{1/2} \right)^{1/2} + \frac{C_\alpha}{2} \Delta t \sum_{k=1}^n \|g_h^k\| \quad \square$$

2.9 Convergence du schéma

Soient u une solution (supposée régulière) du problème linéaire (2.1) avec la condition de Dirichlet homogène (2.2) et $u_h^n = (u_j^n)_{j=1 \dots N}$ une solution du problème discrétisé (2.17)-(2.21). On note $\bar{u}_h^n = (\bar{u}_j^n)_{j=1 \dots N}$ une fonction de L_h^2 définie à partir des valeurs de u aux noeuds (t^n, x_j) , $\bar{u}_j^n = u(t^n, x_j)$, et vérifie (2.24). Soit $e_j^n = \bar{u}_j^n - u_j^n$ l'erreur de convergence, et vérifie

$$\begin{cases} \frac{e_j^{n+1} - 2e_j^n + e_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n}{h^2} + e_j^n = \epsilon_j^n \\ e_j^0 = \bar{u}_j^0 - u_j^0 \\ e_j^1 = \bar{u}_j^1 - u_j^1 \\ e_0^n = e_N^n = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Proposition 2.16. *Sous la condition CFL, $\alpha < (1 - \Delta t^2/4)^{1/2}$ et avec $C_\alpha = (2/(1 - \alpha^2 - \Delta t^2/4))^{1/2}$, on a la majoration de l'énergie discrète de (2.29)*

$$\left(E_h^{n+1/2} \right)^{1/2} \leq \left(E_h^{1/2} \right)^{1/2} + \frac{C_\alpha}{2} T.O(\Delta t^2)$$

Preuve. On a d'après la proposition 2.15 avec $C_\alpha = (2/(1 - \alpha^2 - \Delta t^2/4))^{1/2}$

$$\begin{aligned} \left(E_h^{n+1/2}\right)^{1/2} &\leq \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2} + \frac{C_\alpha}{2} \Delta t \sum_{k=1}^n \|\epsilon_h^k\| \\ &\leq \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2} + \frac{C_\alpha}{2} \Delta t . n O(\Delta t^2 + h^2) \\ &\leq \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2} + \frac{C_\alpha}{2} \Delta t . n O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

D'où, $\left(E_h^{n+1/2}\right)^{1/2} \leq \left(E_h^{1/2}\right)^{1/2} + \frac{C_\alpha}{2} T . O(\Delta t^2)$ □

Chapitre 3

Etude du problème non linéaire

On étudie le problème non linéaire ($0 < \epsilon < 1$) associé à l'équation de Klein-Gordon dans $\Omega = [0, T] \times [0, 1]$ avec les conditions initiales très régulières $l_0(x), l_1(x)$ et vérifiant toutes les conditions de compatibilité aux coins. On s'intéresse le problème non linéaire avec la condition de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} Ku^\epsilon + \epsilon (u^\epsilon)^3 = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ u^\epsilon(0, x) = l_0(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(0, x) = l_1(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ u^\epsilon(t, 0) = u^\epsilon(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.1)$$

et celui avec la condition d'impédance ($0 < z < 1$)

$$\begin{cases} Ku^\epsilon + \epsilon (u^\epsilon)^3 = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ u^\epsilon(0, x) = l_0(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(0, x) = l_1(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(t, 0) = +z \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x}(t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(t, 1) = -z \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x}(t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.2)$$

On admet l'existence de solution $u^\epsilon(t, x) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

3.1 Discrétisation totale par un schéma aux différences finies

3.1.1 Schéma explicite centré sans conditions aux limites

Pour résoudre numériquement le problème non linéaire (3.1) ou (3.2), on utilise un schéma explicite sans condition aux limites ci-dessous, avec $\beta = \alpha^2 = \Delta t^2/h^2$

$$u_j^{n+1} = \beta u_{j+1}^n + (2 - 2\beta - \Delta t^2) u_j^n + \beta u_{j-1}^n - u_j^{n-1} - \epsilon \Delta t^2 (u_j^n)^3 \quad (3.3)$$

3.1.2 Initialisation du schéma

Pour démarrer le schéma, on prend

$$\begin{aligned} u_j^0 &= l_0(jh) \\ u_j^1 &= u_j^0 + \Delta t l_1(jh) + \frac{\beta}{2} (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) - \frac{\Delta t^2}{2} (u_j^0 + \epsilon (u_j^0)^3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Remarque. Pour le problème avec la condition d'impédance, on prend en $x = 0$ et $x = 1$

$$\begin{aligned} u_0^1 &= u_0^0 + \Delta t l_1(0) + \frac{\beta}{2} (u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0) - \frac{\Delta t^2}{2} (u_0^0 + \epsilon (u_0^0)^3) \\ u_N^1 &= u_N^0 + \Delta t l_1(1) + \frac{\beta}{2} (u_{N-2}^0 - 2u_{N-1}^0 + u_N^0) - \frac{\Delta t^2}{2} (u_N^0 + \epsilon (u_N^0)^3) \end{aligned}$$

3.1.3 Discrétisation de la condition aux limites

Discrétisation de la condition de Dirichlet

On prend le même schéma comme le cas linéaire.

Discrétisation de la condition d'impédance

En $x = 0$, on prend le schéma

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= \left(2z\alpha^2 u_1^n + z(2 - 2\alpha^2 - \Delta t^2) u_0^n \right. \\ &\quad \left. + (\alpha - z) u_0^{n-1} - z\epsilon \Delta t^2 (u_0^n)^3 \right) / (\alpha + z) \end{aligned} \quad (3.5)$$

En $x = 1$, on prend le schéma

$$\begin{aligned} u_N^{n+1} &= \left(2z\alpha^2 u_{N-1}^n + z(2 - 2\alpha^2 - \Delta t^2) u_N^n \right. \\ &\quad \left. + (\alpha - z) u_N^{n-1} - z\epsilon \Delta t^2 (u_N^n)^3 \right) / (\alpha + z) \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2 Comportement de la solution non linéaire

On définit l'énergie du système non linéaire (3.1) ou (3.2) par

$$\mathcal{E}[u^\epsilon](t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} \right)^2 + (u^\epsilon)^2 + \frac{\epsilon}{2} (u^\epsilon)^4 \right) dx, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.7)$$

et on pose

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}[u^\epsilon](0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(l_1^2 + (l'_0)^2 + l_0^2 \right) dx = \frac{1}{2} \left(\|l_0\|_{H^1}^2 + \|l_1\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon}{2} \|l_0\|_{L^2}^4 \right)$$

Proposition 3.1. *Soient \mathcal{E}_1 l'énergie du système non linéaire avec la condition de Dirichlet homogène (3.1) et \mathcal{E}_2 l'énergie du système non linéaire avec la condition d'impédance (3.2). Alors $\forall t \geq 0$, on a*

$$\mathcal{E}_1[u^\epsilon](t) = \mathcal{E}_0 \text{ et } \mathcal{E}_2[u^\epsilon](t) \leq \mathcal{E}_0$$

Preuve. La démonstration est identique à celle de la proposition 2.1. \square

Théorème 3.2. *Soient $u^\epsilon(t, x)$ la solution du problème non linéaire avec la condition de Dirichlet homogène (3.1), et $u(t, x)$ la solution du problème linéaire (2.1) avec la condition de Dirichlet homogène (2.2). Alors $\forall t \geq 0$, il existe une constante C telle que $E[u^\epsilon - u](t) \leq C\epsilon^2 t^2$*

Lemme 3.3. *Si $F(t, x) \in L_t^\infty((0, T), L_x^2(0, 1))$, et si $v(t, x)$ est la solution du problème*

$$\begin{cases} Kv = F & , \forall (t, x) \in \Omega \\ v(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ v(t, 0) = v(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.8)$$

Alors $E[v](t) \leq 2 \left(\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 F^2 dx \right) t^2, \forall t \in [0, T]$.

Preuve du Lemme. On a d'après (3.8)

$$\begin{aligned}
2 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} K v dx &= 2 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} F dx \\
\frac{d}{dt} (E[v](t)) &\stackrel{C.S}{\leq} 2 \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 F^2 dx \right)^{1/2} \\
\text{Soit } D &= \left(\max_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 F^2 dx \right)^{1/2} \\
\frac{d}{dt} (E[v](t)) &\leq 2D \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq 2D (2E[v](t))^{1/2} \\
\int_0^t \frac{d(E[v](s))}{2(E[v](s))^{1/2}} &\leq D\sqrt{2} \int_0^t ds \\
(E[v](t))^{1/2} &\leq (E_0)^{1/2} + Dt\sqrt{2} = Dt\sqrt{2}, \text{ car } E_0 = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow E[v](t) \leq 2D^2 t^2$, d'où le résultat annoncé. \square

Preuve du théorème. Soit $v(t, x) = u^\epsilon(t, x) - u(t, x)$, où u est la solution du problème linéaire (2.1) avec la condition de Dirichlet homogène (2.2) et u^ϵ est la solution du problème non linéaire avec la condition de Dirichlet homogène (3.1). On a,

$$\begin{cases}
Kv = -\epsilon(u^\epsilon)^3 & , \forall (t, x) \in \Omega \\
v(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\
\frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\
v(t, 0) = v(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T]
\end{cases}$$

D'après la proposition 3.1, on a $\mathcal{E}[u^\epsilon](t) = O(1)$. Donc $\int_0^1 \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} \right)^2 dx$ est bornée $\forall t \geq 0$. Comme $u^\epsilon(t, 0) = 0$, on a d'après l'inégalité de Poincaré, $\|u^\epsilon\|_\infty = O(1)$. On applique le lemme 3.3 avec $C = 2\|u^\epsilon\|_\infty^6$, donc on a $\forall t \geq 0$, $E[u^\epsilon - u](t) \leq C\epsilon^2 t^2$. \square

3.3 Développement simple d'un mode propre

On cherche la solution approchée du problème non linéaire avec la condition de Dirichlet homogène (3.1) en utilisant le développement asymptotique. Soit $u_{NAIF}(t, x)$ une solution approchée de (3.1) telle que

$$u_{NAIF}(t, x) = u_0(t, x) + \epsilon u_1(t, x) + O(\epsilon^2) \quad (3.9)$$

où $u_0(t, x)$ est une solution particulière du problème linéaire (2.1) avec la condition de Dirichlet homogène (2.2) et avec la condition initiale (2.6). On remplace (3.9) dans (3.1)

$$Ku_0 + \epsilon (Ku_1 + u_0^3) + O(\epsilon^2) = 0 \quad (3.10)$$

On résoud pour $\epsilon = 0$

$$\begin{cases} Ku_0 = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ u_0(0, x) = l_0(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u_0}{\partial t}(0, x) = l_1(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ u_0(t, 0) = u_0(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.11)$$

où l_0, l_1 vérifient la condition initiale (2.6).
et pour $\epsilon \neq 0$

$$\begin{cases} Ku_1 = -u_0^3 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ u_1(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ u_1(t, 0) = u_1(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.12)$$

La solution analytique du problème (3.11) est donnée par (2.4)

$$u_0(t, x) = a \sin(k\pi x) \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = 1 + k^2\pi^2, k \in \mathbb{Z}.$$

en utilisant l'égalité de trigonométrie

$$\begin{cases} \sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4} \\ \cos^3 \theta = \frac{3 \cos \theta + \cos 3\theta}{4} \end{cases} \quad (3.13)$$

on a d'après (3.12)

$$\begin{aligned} Ku_1 = & -\frac{3a^3}{16} \left(3 \sin(k\pi x) \cos(\omega t + \varphi) + \sin(k\pi x) \cos(3(\omega t + \varphi)) \right) \\ & + \frac{a^3}{16} \left(3 \sin(3k\pi x) \cos(\omega t + \varphi) + \sin(3k\pi x) \cos(3(\omega t + \varphi)) \right) \end{aligned}$$

Donc la solution analytique de (3.12) s'écrit

$$\begin{aligned}
u_1(t, x) = & \sum_{l=1}^{+\infty} a_l \sin(l\pi x) \cos(\omega_l t + \varphi_l) \\
& - \frac{9a^3 t}{32\omega^3} \sin(k\pi x) \sin(\omega t + \varphi) \\
& + \frac{3a^3}{128\omega^2} \sin(k\pi x) \cos(3(\omega t + \varphi)) \\
& + \frac{3a^3}{128(k\pi)^2} \sin(3k\pi x) \cos(\omega t + \varphi) \\
& - \frac{a^3}{128} \sin(3k\pi x) \cos(3(\omega t + \varphi))
\end{aligned} \tag{3.14}$$

avec la condition initiale $u_1(0, x) = 0$ et $\partial_t u_1(0, x) = 0$, on a pour $l = k$, $\omega_k = \omega = 1 + k^2\pi^2$

$$\begin{cases} a_k \cos \varphi_k + 3a^3 \cos 3\varphi / 128\omega^2 = 0 \\ -\omega a_k \sin \varphi_k - 9a^3 \sin \varphi / 32\omega - 9\omega a^3 \sin 3\varphi / 128\omega^2 = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

pour $l = 3k$, $\omega_{3k} = 1 + (3k)^2\pi^2$

$$\begin{cases} a_{3k} \cos \varphi_{3k} + 3a^3 \cos \varphi / 128k^2\pi^2 - a^3 \cos 3\varphi / 128 = 0 \\ -\omega_{3k} a_{3k} \sin \varphi_{3k} - 3a^3 \omega \sin \varphi / 128k^2\pi^2 - 3\omega a^3 \sin 3\varphi / 128 = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

pour $l \neq k, 3k$

$$\begin{cases} a_l \cos \varphi_l = 0 \\ -\omega_l a_l \sin \varphi_l = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

On en déduit d'après (3.17) que $a_l = 0$, $\forall l \neq k, 3k$.

On trouve finalement la solution approchée du problème non linéaire (3.1) avec la condition initiale (2.6)

$$\begin{aligned}
u_{NAIF}(t, x) = & a \sin(k\pi x) \cos(\omega t + \varphi) \\
& + \epsilon \left(a_k \sin(k\pi x) \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right. \\
& + a_{3k} \sin(3k\pi x) \cos(\omega_{3k} t + \varphi_{3k}) \\
& - \frac{9a^3 t}{32\omega^3} \sin(k\pi x) \sin(\omega t + \varphi) \\
& + \frac{3a^3}{128\omega^2} \sin(k\pi x) \cos(3(\omega t + \varphi)) \\
& + \frac{3a^3}{128(k\pi)^2} \sin(3k\pi x) \cos(\omega t + \varphi) \\
& \left. - \frac{a^3}{128} \sin(3k\pi x) \cos(3(\omega t + \varphi)) \right) \\
& + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où (a_k, φ_k) et (a_{3k}, φ_{3k}) vérifient la relation (3.15) et (3.16).

Lemme 3.4. Soient $G_\epsilon(t, x, r^\epsilon)$, une famille de fonctions régulières par rapport à $(t, x, r^\epsilon, \epsilon)$. Et soit $r^\epsilon(t, x)$, la solution du problème

$$\begin{cases} Kr^\epsilon = \epsilon G_\epsilon(t, x, r^\epsilon) & , \forall (t, x) \in \Omega \\ r^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ r^\epsilon(t, 0) = r^\epsilon(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.19)$$

Alors $\forall t \in [0, T]$, $E[r^\epsilon](t) \leq \frac{D}{2(1+2L)} e^{2(1+2L)\epsilon t}$,

où $D = D(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 G_\epsilon^2(t, x, 0) dx$,

et $L = L(T) = \sup_{\substack{|r| \leq M, 0 \leq \epsilon \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T}} \left| \frac{\partial G_\epsilon}{\partial r}(t, x, r) \right|$.

Preuve. Soient $D = D(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 G_\epsilon^2(t, x, 0) dx$,

et $L = L(T) = \sup_{\substack{|r| \leq M, 0 \leq \epsilon \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T}} \left| \frac{\partial G_\epsilon}{\partial r}(t, x, r) \right|$.

On a d'après le théorème des accroissements finis

$$|G_\epsilon(t, x, r^\epsilon)| \leq |G_\epsilon(t, x, 0)| + L|r^\epsilon|.$$

Le système (3.19) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E[r^\epsilon](t)) &= 2 \int_0^1 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} Kr^\epsilon dx = 2\epsilon \int_0^1 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} G_\epsilon(t, x, r^\epsilon) dx \\ \frac{d}{dt}(E[r^\epsilon](t)) &\leq \left| 2\epsilon \int_0^1 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} G_\epsilon(t, x, r^\epsilon) dx \right| \leq 2\epsilon \int_0^1 \left| \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} \right| \cdot |G_\epsilon(t, x, r^\epsilon)| dx \\ \frac{d}{dt}(E[r^\epsilon](t)) &\leq 2\epsilon \int_0^1 \left| \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} \right| \cdot |G_\epsilon(t, x, 0)| dx + 2\epsilon L \int_0^1 \left| \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} \right| \cdot |r^\epsilon| dx \end{aligned}$$

on a en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E[r^\epsilon](t)) &\stackrel{C.S}{\leq} 2\epsilon\sqrt{D} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + 2\epsilon L \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (r^\epsilon)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq 2\epsilon\sqrt{D} \cdot \sqrt{2E[r^\epsilon](t)} + 4\epsilon L \cdot E[r^\epsilon](t) \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Young ($a^2 + b^2 \geq 2ab$), on a

$$\frac{d}{dt}(E[r^\epsilon](t)) \leq \epsilon D + 2\epsilon(1 + 2L)E[r^\epsilon](t)$$

et on applique le lemme de Gronwall ($E[r^\epsilon](0) = 0$)

$$E[r^\epsilon](t) \leq \frac{D}{2(1 + 2L)}(e^{2(1+2L)\epsilon t} - 1) \leq \frac{D}{2(1 + 2L)}e^{2(1+2L)\epsilon t}$$

□

Théorème 3.5. Soient $u^\epsilon(t, x)$ la solution du problème non linéaire avec la condition de Dirichlet homogène (3.1), $u_{NAIF}(t, x)$ une solution approché de (3.1) vérifiée (3.9). Alors $\forall t \in [0, T]$, il existe une constante C_T , dépend de T fixé, telle que $\boxed{E[u^\epsilon - u_{NAIF}](t) \leq \epsilon^4 C_T}$

Preuve du théorème. Soit $v = u^\epsilon - u_{NAIF} = \epsilon^2 r^\epsilon$.

$$\begin{aligned} u^\epsilon &= u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 r^\epsilon \\ Ku^\epsilon + \epsilon(u^\epsilon)^3 &= K(u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 r^\epsilon) + \epsilon(u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 r^\epsilon)^3 = 0 \\ Ku_0 + \epsilon(Ku_1 + u_0^3) + \epsilon^2(Kr^\epsilon + 3u_0^2 u_1 + \epsilon G_\epsilon(t, x, r^\epsilon)) &= 0 \end{aligned}$$

où

$$G_\epsilon(t, x, r^\epsilon) = 3(u_0 u_1^2 + u_0^2 r^\epsilon) + \epsilon(u_1^3 + 6u_0 u_1 r^\epsilon) + 3\epsilon^2(u_1^2 + u_0 r^\epsilon)r^\epsilon + \epsilon^3 u_1 (r^\epsilon)^2 + \epsilon^4 (r^\epsilon)^3$$

Pour $\epsilon = 0$

$$\begin{cases} Ku_0 = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ u_0(0, x) = l_0(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u_0}{\partial t}(0, x) = l_1(x) & , \forall x \in [0, 1] \\ u_0(t, 0) = u_0(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour $\epsilon \neq 0$

$$\begin{cases} Ku_1 = -u_0^3 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ u_1(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ u_1(t, 0) = u_1(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} Kr^\epsilon = -3u_0^2 u_1 - \epsilon G_\epsilon(t, x, r^\epsilon) & , \forall (t, x) \in \Omega \\ r^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ r^\epsilon(t, 0) = r^\epsilon(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.22)$$

Soit $r^\epsilon = r_1^\epsilon + r_2^\epsilon$ tel que

$$\begin{cases} Kr_1^\epsilon = -3u_0^2 u_1 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ r_1^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial r_1^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ r_1^\epsilon(t, 0) = r_1^\epsilon(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} Kr_2^\epsilon = -\epsilon G_\epsilon(t, x, r_1^\epsilon + r_2^\epsilon) & , \forall (t, x) \in \Omega \\ r_2^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial r_2^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ r_2^\epsilon(t, 0) = r_2^\epsilon(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.24)$$

On sait que la solution $u_0(t, x)$ de (3.20) est bornée pour tout $t \geq 0$. La solution $u_1(t, x)$ de (3.21) est bornée $\forall t \in [0, T]$ pour T fixé (d'après le lemme 3.3). On en déduit ensuite que la solution $r_1^\epsilon(t, x)$ de (3.23) est aussi bornée $\forall t \in [0, T]$. Pour T fixé, $D = D(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 G_\epsilon^2(t, x, 0) dx < +\infty$,

et $L = L(T) = \sup_{\substack{|r| \leq M, 0 \leq \epsilon \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T}} \left| \frac{\partial G_\epsilon}{\partial r}(t, x, r) \right| < +\infty$. Donc avec une constante

$C_T = \frac{D}{2(1+2L)} e^{2(1+2L)\epsilon T} < +\infty$, on a d'après le lemme 3.4, $E[r_2^\epsilon](t) \leq C_T$. D'où $E[r^\epsilon](t) \leq C_T$.

$$\begin{aligned} v = \epsilon^2 r^\epsilon &\Rightarrow Kv = \epsilon^2 Kr^\epsilon \text{ et } \frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon^2 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} \\ 2 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} K v dx &= 2\epsilon^4 \int_0^1 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} K r^\epsilon dx \\ \frac{d}{dt} (E[v](t)) &= \epsilon^4 \frac{d}{dt} (E[r^\epsilon](t)) \\ \int_0^t \frac{d(E[v](s))}{ds} &= \epsilon^4 \int_0^t \frac{d(E[r^\epsilon](s))}{ds} \\ E[v](t) - E[v](0) &= \epsilon^4 (E[r^\epsilon](t) - E[r^\epsilon](0)) \\ E[v](0) = E[r^\epsilon](0) = 0 &\Rightarrow E[v](t) = \epsilon^4 E[r^\epsilon](t) \end{aligned}$$

Donc $\forall t \in [0, T]$, $E[u^\epsilon - u_{NAIF}](t) \leq \epsilon^4 C_T$. \square

3.4 Développement avec une phase

On cherche une approximation de u^ϵ sur des intervalles de temps en $1/\epsilon$. Soit $u_\phi(t, x)$ une solution approchée du problème non linéaire avec la condi-

tion de Dirichlet homogène (3.1) telle que

$$u_\phi(t, x) = u_{\phi_0}(t, x) + \epsilon u_1(t, x) + O(\epsilon^2) \quad (3.25)$$

où

$$\begin{cases} u_{\phi_0}(t, x) = a \sin(k\pi x) \cos(\omega_\epsilon t + \varphi) \\ \omega_\epsilon = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + O(\epsilon^2) \\ \omega_0^2 = 1 + k^2 \pi^2, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.26)$$

On remplace (3.25) dans (3.1)

$$\begin{aligned} Ku_\phi + \epsilon u_\phi^3 &= Ku_{\phi_0} + \epsilon Ku_1 + \epsilon (u_{\phi_0} + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2))^3 + O(\epsilon^2) = 0 \\ (-\omega_0^2 + 1 + k^2 \pi^2) u_{\phi_0} + \epsilon (Ku_1 - 2\omega_0 \omega_1 u_{\phi_0} + u_{\phi_0}^3) &= 0 \\ \epsilon (Ku_1 - 2\omega_0 \omega_1 u_{\phi_0} + u_{\phi_0}^3) &= 0, \text{ car } \omega_0^2 = 1 + k^2 \pi^2 \end{aligned}$$

On résoud pour $\epsilon \neq 0$

$$\begin{cases} Ku_1 = 2\omega_0 \omega_1 u_{\phi_0} - u_{\phi_0}^3, \forall (t, x) \in \Omega \\ u_1(0, x) = 0, \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) = 0, \forall x \in [0, 1] \\ u_1(t, 0) = u_1(t, 1) = 0, \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.27)$$

En utilisant la relation (3.13), on a

$$\begin{aligned} 2\omega_0 \omega_1 u_{\phi_0} - u_{\phi_0}^3 &= \left(2\omega_0 \omega_1 - \frac{9a^2}{16}\right) a \sin(k\pi x) \cos(\omega_\epsilon t + \varphi) \\ &\quad - \frac{3a^3}{16} \sin(k\pi x) \cos(3(\omega_\epsilon t + \varphi)) \\ &\quad + \frac{3a^3}{16} \sin(3k\pi x) \cos(\omega_\epsilon t + \varphi) \\ &\quad + \frac{a^3}{16} \sin(3k\pi x) \cos(3(\omega_\epsilon t + \varphi)) \end{aligned}$$

avec $\boxed{\omega_1 = 9a^2/32\omega_0}$, on trouve que

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= \sum_{l=1}^{+\infty} a_l \sin(l\pi x) \cos(\omega_l t + \varphi_l) \\ &\quad + \frac{3a^3}{16(8\omega_0^2 + 18\epsilon\omega_0\omega_1)} \sin(k\pi x) \cos(3\omega_\epsilon t + \varphi) \\ &\quad + \frac{3a^3}{16(8k^2\pi^2 - 2\epsilon\omega_0\omega_1)} \sin(3k\pi x) \cos(\omega_\epsilon t + \varphi) \\ &\quad - \frac{a^3}{16(8 + 18\epsilon\omega_0\omega_1)} \sin(3k\pi x) \cos(3(\omega_\epsilon t + \varphi)) \\ &\quad + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

et avec la condition initiale $u_1(0, x) = 0$ et $\partial_t u_1(0, x) = 0$, on a pour $l = k$, $\omega_k = \omega_0$

$$\begin{cases} a_k \cos \varphi_k + \frac{3a^3 \cos 3\varphi}{16(8\omega_0^2 + 18\epsilon\omega_0\omega_1)} = 0 \\ -\omega_0 a_k \sin \varphi_k - \frac{9\omega_\epsilon a^3 \sin 3\varphi}{16(8\omega_0^2 + 18\epsilon\omega_0\omega_1)} = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

pour $l = 3k$, $\omega_{3k} = 1 + (3k)^2\pi^2$

$$\begin{cases} a_{3k} \cos \varphi_{3k} + \frac{3a^3 \cos \varphi}{16(8k^2\pi^2 - 2\epsilon\omega_0\omega_1)} - \frac{a^3 \cos 3\varphi}{16(8 + 18\epsilon\omega_0\omega_1)} = 0 \\ -\omega_{3k} a_{3k} \sin \varphi_{3k} - \frac{3\omega_\epsilon a^3 \sin \varphi}{16(8k^2\pi^2 - 2\epsilon\omega_0\omega_1)} + \frac{3\omega_\epsilon a^3 \sin 3\varphi}{16(8 + 18\epsilon\omega_0\omega_1)} = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

pour $l \neq k, 3k$

$$\begin{cases} a_l \cos \varphi_l = 0 \\ -\omega_l a_l \sin \varphi_l = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

On en déduit d'après (3.31) que $a_l = 0$, $\forall l \neq k, 3k$.

On trouve finalement la solution approchée du problème non linéaire (3.1) avec la condition initiale (2.6)

$$\begin{aligned} u_\phi(t, x) = & a \sin(k\pi x) \cos(\omega_\epsilon t + \varphi) \\ & + \epsilon \left(a_k \sin(k\pi x) \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right. \\ & + a_{3k} \sin(3k\pi x) \cos(\omega_{3k} t + \varphi_{3k}) \\ & + \frac{3a^3}{16(8\omega_0^2 + 18\epsilon\omega_0\omega_1)} \sin(k\pi x) \cos(3(\omega_\epsilon t + \varphi)) \\ & + \frac{3a^3}{16(8k^2\pi^2 - 2\epsilon\omega_0\omega_1)} \sin(3k\pi x) \cos(\omega_\epsilon t + \varphi) \\ & \left. - \frac{a^3}{16(8 + 18\epsilon\omega_0\omega_1)} \sin(3k\pi x) \cos(3(\omega_\epsilon t + \varphi)) \right) \\ & + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

où (a_k, φ_k) et (a_{3k}, φ_{3k}) vérifient la relation (3.29) et (3.30).

Théorème 3.6. Soient $u^\epsilon(t, x)$ la solution du problème non linéaire avec la condition de Dirichlet homogène (3.1) et $u_{\phi_0}(t, x)$ vérifiée la relation (3.26). Alors il existe une constante $\gamma > 0$ et $C_\gamma > 0$ telle que $\forall t \in [0, \gamma/\epsilon]$,

$$\boxed{E[u^\epsilon - u_{\phi_0}](t) \leq \epsilon^2 C_\gamma}$$

Lemme 3.7. Soient $H_\epsilon(t, x, r^\epsilon)$, une famille de fonctions très régulières par rapport à $(t, x, r^\epsilon, \epsilon)$ telle que $H = \sup_{\substack{|r| \leq M, \epsilon \in [0, 1] \\ x \in [0, 1], t \in [0, \gamma/\epsilon]}} |H_\epsilon(t, x, r)| < +\infty$.

Soit $r^\epsilon(t, x)$, la solution du problème

$$\begin{cases} Kr^\epsilon = \epsilon H_\epsilon(t, x, r^\epsilon) & , \forall (t, x) \in [0, \gamma/\epsilon] \times [0, 1] \\ r^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ r^\epsilon(t, 0) = r^\epsilon(t, 0) = 0 & , \forall t \in [0, \gamma/\epsilon] \end{cases}$$

Alors $\forall t \in [0, \gamma/\epsilon]$, il existe une constante C_γ telle que, $E[r^\epsilon](t) \leq C_\gamma$.

Preuve du Lemme. Soit $H = \sup_{\substack{|r| \leq M, \epsilon \in [0, 1] \\ x \in [0, 1], t \in [0, \gamma/\epsilon]}} |H_\epsilon(t, x, r)|$, on a

$$\begin{aligned} Kr^\epsilon &\leq \epsilon H \\ \frac{d}{dt}(E[r^\epsilon](t)) &\leq 2\epsilon H \int_0^1 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} dx \stackrel{C.S}{\leq} 2\epsilon H \left(\int_0^1 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} dx \right)^{1/2} \\ \frac{d}{dt}(E[r^\epsilon](t)) &\leq 2\epsilon H \sqrt{2E[r^\epsilon](t)} \\ \int_0^t \frac{d(E[r^\epsilon](s))}{2\sqrt{E[r^\epsilon](s)}} ds &\leq \sqrt{2}\epsilon H \int_0^t ds \\ \sqrt{E[r^\epsilon](t)} - \sqrt{E[r^\epsilon](0)} &\leq \sqrt{2}H\epsilon t \\ \Rightarrow E[r^\epsilon](t) &\leq 2H^2(\epsilon t)^2, \quad (\text{car } E[r^\epsilon](0) = 0). \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie tant que $|r| \leq M \Rightarrow E[r](t) \leq \delta^2 M^2$.

Donc il existe $\gamma = \frac{\delta M}{\sqrt{2}H}$ tel que $\forall t \in [0, \gamma/\epsilon]$, $E[r^\epsilon](t) \leq 2H^2\gamma^2$ □

Preuve du théorème. Soient $v = u^\epsilon - u_{\phi_0} = \epsilon r^\epsilon$. On a

$$\begin{aligned} u^\epsilon &= u_{\phi_0} + \epsilon r^\epsilon \\ Ku^\epsilon + \epsilon (u^\epsilon)^3 &= K(u_{\phi_0} + \epsilon r^\epsilon) + \epsilon (u_{\phi_0} + \epsilon r^\epsilon)^3 = 0 \\ (-\omega_0^2 + 1 + k^2\pi^2)u_{\phi_0} + \epsilon (Kr^\epsilon - 2\omega_0\omega_1u_{\phi_0} + u_{\phi_0}^3 + \epsilon H_\epsilon) &= 0 \end{aligned}$$

où

$$H_\epsilon(t, x, r^\epsilon) = -\omega_1^2 u_{\phi_0}^2 + 3u_{\phi_0}^2 r^\epsilon + 3\epsilon u_{\phi_0} (r^\epsilon)^2 + \epsilon^2 (r^\epsilon)^3$$

Pour $\epsilon \neq 0$ et avec la relation de dispersion ($\omega^2 = 1 + k^2\pi^2$), on a

$$\begin{cases} Kr^\epsilon = 2\omega_0\omega_1u_{\phi_0} - u_{\phi_0}^3 - \epsilon H_\epsilon & , \forall (t, x) \in [0, \gamma/\epsilon] \times [0, 1] \\ r^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ r^\epsilon(t, 0) = r^\epsilon(t, 0) = 0 & , \forall t \in [0, \gamma/\epsilon] \end{cases} \quad (3.33)$$

Soit $r^\epsilon = r_1^\epsilon + r_2^\epsilon$ tel que

$$\begin{cases} Kr_1^\epsilon = 2\omega_0\omega_1 u_{\phi_0} - u_{\phi_0}^3 & , \forall (t, x) \in [0, \gamma/\epsilon] \times [0, 1] \\ r_1^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial r_1^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ r_1^\epsilon(t, 0) = r_1^\epsilon(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, \gamma/\epsilon] \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} Kr_2^\epsilon = -\epsilon H_\epsilon(t, x, r_1^\epsilon + r_2^\epsilon) & , \forall (t, x) \in [0, \gamma/\epsilon] \times [0, 1] \\ r_2^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial r_2^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ r_2^\epsilon(t, 0) = r_2^\epsilon(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, \gamma/\epsilon] \end{cases} \quad (3.35)$$

La solution r_1^ϵ de (3.34) est bornée $\forall t \geq 0$, d'après (3.28).

$H = \sup_{\substack{|r| \leq M, \epsilon \in [0, 1] \\ x \in [0, 1], t \in [0, \gamma/\epsilon]}} |H_\epsilon(t, x, r)| < +\infty$ est bien défini $\forall t \in [0, \gamma/\epsilon]$. Donc

d'après le lemme 3.7, il existe une consante $\gamma > 0$ et $C_\gamma = 2H^2\gamma^2$ telle que $E[r_2^\epsilon](t) \leq C_\gamma$, d'où $E[r^\epsilon](t) \leq C_\gamma$.

$$\begin{aligned} v = \epsilon r^\epsilon &\Rightarrow Kv = \epsilon Kr^\epsilon \text{ et } \frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} \\ 2 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} K v dx &= 2\epsilon^2 \int_0^1 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} K r^\epsilon dx \\ \frac{d}{dt} (E[v](t)) &= \epsilon^2 \frac{d}{dt} (E[r^\epsilon](t)) \\ \int_0^t \frac{d(E[v](s))}{ds} &= \epsilon^2 \int_0^t \frac{d(E[r^\epsilon](s))}{ds} \\ E[v](t) - E[v](0) &= \epsilon^2 (E[r^\epsilon](t) - E[r^\epsilon](0)) \\ E[v](0) = E[r^\epsilon](0) = 0 &\Rightarrow E[v](t) = \epsilon^2 E[r^\epsilon](t). \end{aligned}$$

Donc on a $\forall t \in [0, \gamma/\epsilon]$, $E[u^\epsilon - u_{\phi_0}](t) \leq \epsilon^2 C_\gamma$. □

Théorème 3.8. Soient $u^\epsilon(t, x)$ la solution du problème non linéaire avec la condition de Dirichlet homogène (3.1) et $u_\phi(t, x)$ une solution approchée de (3.1) vérifiée (3.25). Alors il existe une constante $\gamma > 0$ et $C_\gamma > 0$ telle que $\forall t \in [0, \gamma/\epsilon]$, $E[u^\epsilon - u_\phi](t) \leq \epsilon^4 C_\gamma$

Preuve du théorème. Soit $v = u^\epsilon - u_\phi = \epsilon^2 r^\epsilon$. On a

$$\begin{aligned} u^\epsilon &= u_{\phi_0} + \epsilon u_1 + \epsilon^2 r^\epsilon \\ Ku^\epsilon + \epsilon (u^\epsilon)^3 &= K(u_{\phi_0} + \epsilon u_1 + \epsilon^2 r^\epsilon) + \epsilon (u_{\phi_0} + \epsilon u_1 + \epsilon^2 r^\epsilon)^3 = 0 \end{aligned}$$

$$(-\omega_0^2 + 1 + k^2\pi^2) u_{\phi_0} + \epsilon (Ku_1 - 2\omega_0\omega_1 u_{\phi_0} + u_{\phi_0}^3) + \epsilon^2 (Kr^\epsilon - \omega_1^2 u_{\phi_0} + 3u_{\phi_0}^2 u_1 + \epsilon H_\epsilon) = 0$$

où

$$H_\epsilon(t, x, r^\epsilon) = 3(u_{\phi_0} u_1^2 + u_{\phi_0}^2 r^\epsilon) + \epsilon(u_1^3 + 6u_{\phi_0} u_1 r^\epsilon) + 3\epsilon^2(u_1^2 + u_{\phi_0} r^\epsilon) r^\epsilon + \epsilon^3 u_1 (r^\epsilon)^2 + \epsilon^4 (r^\epsilon)^3$$

On a pour $\epsilon \neq 0$ et avec la relation de dispersion ($\omega_0^2 = 1 + k^2\pi^2$)

$$\begin{cases} Ku_1 = 2\omega_0\omega_1 u_{\phi_0} - u_{\phi_0}^3 + \epsilon(\omega_1^2 u_{\phi_0} - 3u_{\phi_0}^2 u_1) & , \forall (t, x) \in [0, \gamma/\epsilon] \times [0, 1] \\ u_1(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ u_1(t, 0) = u_1(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, \gamma/\epsilon] \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} Kr^\epsilon = -\epsilon H_\epsilon & , \forall (t, x) \in [0, \gamma/\epsilon] \times [0, 1] \\ r^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ r^\epsilon(t, 0) = r^\epsilon(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, \gamma/\epsilon] \end{cases} \quad (3.37)$$

D'après le théorème 3.6, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que la solution u_1 de (3.36) est bornée $\forall t \in [0, \gamma/\epsilon]$. On sait que $H = \sup_{\substack{|r| \leq M, \epsilon \in [0, 1] \\ x \in [0, 1], t \in [0, \gamma/\epsilon]}} |H_\epsilon(t, x, r)| < +\infty$ est bien défini $\forall t \in [0, \gamma/\epsilon]$. Donc d'après le lemme 3.7, il existe une consante $C_\gamma = 2H^2\gamma^2$ telle que $E[r^\epsilon](t) \leq C_\gamma$.

$$\begin{aligned} v = \epsilon^2 r^\epsilon &\Rightarrow Kv = \epsilon^2 Kr^\epsilon \text{ et } \frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon^2 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} \\ 2 \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} K v dx &= 2\epsilon^4 \int_0^1 \frac{\partial r^\epsilon}{\partial t} Kr^\epsilon dx \\ \frac{d}{dt} (E[v](t)) &= \epsilon^4 \frac{d}{dt} (E[r^\epsilon](t)) \\ \int_0^t \frac{d(E[v](s))}{ds} &= \epsilon^4 \int_0^t \frac{d(E[r^\epsilon](s))}{ds} \\ E[v](t) - E[v](0) &= \epsilon^4 (E[r^\epsilon](t) - E[r^\epsilon](0)) \\ E[v](0) = E[r^\epsilon](0) = 0 &\Rightarrow E[v](t) = \epsilon^4 E[r^\epsilon](t). \end{aligned}$$

Donc on a $\forall t \in [0, \gamma/\epsilon]$, $E[u^\epsilon - u_\phi](t) \leq \epsilon^4 C_\gamma$. □

3.5 Développement double échelle

Soient $T_0 = t$, $T_1 = \epsilon t$, $X_0 = x$. Et soit $u^\epsilon(t, x) = U(T_0, T_1, X_0; \epsilon)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\epsilon^2) \\ \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U_0}{\partial X_0^2} + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

Si $u^\epsilon(t, x) = U_0(T_0, T_1, X_0) + \epsilon U_1(T_0, T_1, X_0) + O(\epsilon^2)$ une solution approchée du problème non linéaire (3.1) avec la condition initiale d'une fonction propre (2.6), alors on a

$$KU_0 + \epsilon \left(KU_1 + 2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial T_0 \partial T_1} + U_0^3 \right) + O(\epsilon^2) = 0$$

On résoud pour $\epsilon = 0$

$$\begin{cases} KU_0 = 0 \\ U_0(0, T_1, X_0) = A(T_1) \sin(k\pi X_0) \cos(\phi(T_1)) \\ \frac{\partial U_0}{\partial T_0}(0, T_1, X_0) = -\omega A(T_1) \sin(k\pi X_0) \sin(\phi(T_1)) \end{cases} \quad (3.38)$$

et pour $\epsilon \neq 0$

$$\begin{cases} KU_1 = -2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial T_0 \partial T_1} - U_0^3 \\ U_1(0, T_1, X_0) = 0 \\ \frac{\partial U_1}{\partial T_0}(0, T_1, X_0) = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

La solution de (3.38) s'écrit

$$U_0(T_0, T_1, X_0) = A(T_1) \sin(k\pi X_0) \cos(\omega T_0 + \phi(T_1))$$

Le (3.39) devient

$$\begin{aligned}KU_1 &= 2\omega A'(T_1) \sin(k\pi X_0) \sin(\omega T_0 + \phi(T_1)) \\ &+ \left(2\omega A(T_1) \phi'(T_1) - \frac{9A^3(T_1)}{16} \right) \sin(k\pi X_0) \cos(\omega T_0 + \phi(T_1)) \\ &- \frac{3A^3(T_1)}{16} \sin(k\pi X_0) \cos(3(\omega T_0 + \phi(T_1))) \\ &+ \frac{3A^3(T_1)}{16} \sin(3k\pi X_0) \cos(\omega T_0 + \phi(T_1)) \\ &+ \frac{A^3(T_1)}{16} \sin(3k\pi X_0) \cos(3(\omega T_0 + \phi(T_1)))\end{aligned} \quad (3.40)$$

On élimine le terme résonant dans U_1 en prenant $A(T_1)$ et $\phi(T_1)$ tels que

$$\begin{cases} A'(T_1) = 0 \\ A(T_1)\phi'(T_1) = 9A^3(T_1)/16 \end{cases} \quad (3.41)$$

Le (3.41) donne

$$\begin{aligned} A(T_1) &= a : \text{une constante (supposée non nulle)}. \\ \phi(T_1) &= \frac{9A^2}{32\omega}T_1 + \varphi = \frac{9a^2}{32\omega}\epsilon T_0 + \varphi, \quad \varphi : \text{une constante.} \end{aligned}$$

et on trouve la solution particulière de (3.40), avec $\boxed{\omega_1 = 9a^2/32\omega}$

$$\begin{aligned} U_1(T_0, T_1, X_0) &= \frac{3a^3}{16(8\omega^2 + 18\epsilon\omega\omega_1)} \sin(k\pi X_0) \cos(3((\omega + \epsilon\omega_1)T_0 + \varphi)) \\ &+ \frac{3a^3}{16(8k^2\pi^2 - 2\epsilon\omega\omega_1)} \sin(3k\pi X_0) \cos((\omega + \epsilon\omega_1)T_0 + \varphi) \\ &- \frac{a^3}{16(8 + 18\epsilon\omega\omega_1)} \sin(3k\pi X_0) \cos(3((\omega + \epsilon\omega_1)T_0 + \varphi)) \end{aligned}$$

Donc on trouve que la solution du problème non linéaire avec la condition de Dirichlet homogène (3.1) donnée par le développement double échelle est la même que celle donnée par le développement avec une phase.

Chapitre 4

Etude du problème retourné

On étudie dans ce chapitre le problème retourné avec la condition aux limites de Dirichlet non homogène, du problème linéaire et non linéaire présentés dans les chapitres précédents. En réalité, ce problème est posé dans $\Omega' = [T, 2T] \times [0, 1]$, mais on travaille techniquement dans $\Omega = [0, T] \times [0, 1]$.

4.1 Etude du problème retourné linéaire

Soit u la solution du problème linéaire (2.1). On étudie le problème retourné linéaire 'exact'

$$\left\{ \begin{array}{ll} K v_e = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ v_e(0, x) = u(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v_e}{\partial t}(0, x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ v_e(t, 0) = u(T - t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ v_e(t, 1) = u(T - t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (4.1)$$

et le problème retourné linéaire 'sans changement de vitesse'

$$\left\{ \begin{array}{ll} K v = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ v(0, x) = u(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = +\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ v(t, 0) = u(T - t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ v(t, 1) = u(T - t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \quad (4.2)$$

4.1.1 Schéma explicite centré sans conditions aux limites

Pour résoudre numériquement le problème retourné linéaire (4.1) ou (4.2), on utilise un schéma explicite sans condition aux limites ci-dessous, avec $\beta = \alpha^2 = \Delta t^2/h^2$

$$v_j^{n+1} = \beta v_{j+1}^n + (2 - 2\beta - \Delta t^2) v_j^n + \beta v_{j-1}^n - v_j^{n-1} \quad (4.3)$$

4.1.2 Initialisation du schéma

Pour approcher $v(0, x_j)$, on prend simplement avec $L = T/\Delta t$

$$v_j^0 = u_j^L \quad (4.4)$$

Pour approcher $v(\Delta t, x_j)$ et avoir l'approximation d'ordre 2 en temps de $\frac{\partial v}{\partial t}$, on utilise des développements de Taylor ci-dessous

$$\begin{aligned} v(\Delta t, x) &= v(0, x) + \Delta t \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(0, x) + O(\Delta t^3) \\ v(T - \Delta t, x) &= T(\Delta t, x) - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(T, x) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(T, x) + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

Pour le problème retourné linéaire 'exact' (4.1), on prend avec $\beta = \alpha^2$

$$\begin{aligned} v_j^1 &= u_j^{L-1} - \frac{\beta}{2}(u_{j+1}^L - 2u_j^L + u_{j-1}^L) + \frac{\Delta t^2}{2} u_j^L \\ &\quad + \frac{\beta}{2}(v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0) - \frac{\Delta t^2}{2} v_j^0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour le problème retourné linéaire 'sans changement de vitesse' (4.2), on prend

$$\begin{aligned} v_j^1 &= 2u_j^L - u_j^{L-1} + \frac{\beta}{2}(u_{j+1}^L - 2u_j^L + u_{j-1}^L) - \frac{\Delta t^2}{2} u_j^L \\ &\quad + \frac{\beta}{2}(v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0) - \frac{\Delta t^2}{2} v_j^0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.1.3 Discrétisation de la condition aux limites

En $x = 0$ et $x = 1$, on prend avec $L = T/\Delta t$

$$\begin{cases} v_0^n = u_0^{L-n} \\ v_N^n = u_N^{L-n} \end{cases} \quad (4.7)$$

4.1.4 Comportement de la solution retourné linéaire

Proposition 4.1. Soient v_e la solution du problème retourné linéaire 'exact' (4.1) et u la solution du problème linéaire (2.1). Alors $\boxed{v_e(T, x) = u(0, x)}$

Preuve. Soit $\tilde{v}(t, x) = u(T - t, x)$, $\forall (t, x) \in \Omega$.

$$\begin{aligned} K\tilde{v}(t, x) &= Ku(T - t, x) = Ku(s, x) = 0, \quad \forall (s, x) \in \Omega \\ \tilde{v}(0, x) &= u(T, x), \quad \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(0, x) &= -\frac{\partial u}{\partial t}(T, x), \quad \forall x \in [0, 1] \\ \tilde{v}(t, 0) &= u(T - t, 0), \quad \forall t \in [0, T] \\ \tilde{v}(t, 1) &= u(T - t, 1), \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Donc \tilde{v} est aussi une solution de (4.1), et par l'unicité de la solution, on a $v_e(t, x) = \tilde{v}(t, x) = u(T - t, x)$. D'où $v_e(T, x) = u(0, x)$. \square

Théorème 4.2. Soient v la solution du problème retourné linéaire 'sans changement de vitesse' (4.2), et u la solution du problème linéaire (2.1).

Alors $\boxed{\int_0^1 (v(T, x) - u(0, x))^2 dx \leq 4 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx}$

Théorème 4.3. De plus si u est la solution du problème linéaire (2.1) avec la condition d'impédance (2.3), alors $\boxed{\int_0^1 (v(T, x) - u(0, x))^2 dx \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0}$

Preuve du théorème 4.2. Soit $R(t, x) = v(t, x) - v_e(t, x)$, où v_e est la solution de (4.1) et v est la solution de (4.2). R vérifie

$$\begin{cases} KR = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ R(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial R}{\partial t}(0, x) = 2 \frac{\partial u}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ R(t, 0) = R(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

Donc l'énergie de R est conservée, et on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (R(T, x))^2 dx &\leq 2E[R](T) = 2E[R](0) \\ \int_0^1 (v(T, x) - v_e(T, x))^2 dx &\leq 4 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \end{aligned}$$

Donc on a $\int_0^1 (v(T, x) - u(0, x))^2 dx \leq 4 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx$. \square

Preuve du théorème 4.3. Si u est la solution du problème linéaire (2.1) avec la condition d'impédance (2.3), alors d'après le théorème 2.5

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc $\int_0^1 (v(T, x) - u(0, x))^2 dx \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$. \square

4.2 Etude du problème retourné non linéaire

Soit u^ϵ la solution du problème non linéaire (3.1) ou (3.2). On étudie le problème retourné non linéaire 'exact'

$$\begin{cases} K v_\epsilon^\epsilon + \epsilon (v_\epsilon^\epsilon)^3 = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ v_\epsilon^\epsilon(0, x) = u^\epsilon(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v_\epsilon^\epsilon}{\partial t}(0, x) = -\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ v_\epsilon^\epsilon(t, 0) = u^\epsilon(T - t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ v_\epsilon^\epsilon(t, 1) = u^\epsilon(T - t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (4.8)$$

et le problème retourné non linéaire 'sans changement de vitesse'

$$\begin{cases} K v^\epsilon + \epsilon (v^\epsilon)^3 = 0 & , \forall (t, x) \in \Omega \\ v^\epsilon(0, x) = u^\epsilon(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}(0, x) = +\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ v^\epsilon(t, 0) = u^\epsilon(T - t, 0) & , \forall t \in [0, T] \\ v^\epsilon(t, 1) = u^\epsilon(T - t, 1) & , \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (4.9)$$

4.2.1 Schéma explicite centré sans conditions aux limites

Pour résoudre numériquement le problème retourné non linéaire (4.8) ou (4.9), on utilise un schéma explicite sans condition aux limites ci-dessous, avec $\beta = \alpha^2 = \Delta t^2/h^2$

$$v_j^{n+1} = \beta v_{j+1}^n + (2 - 2\beta - \Delta t^2) v_j^n + \beta v_{j-1}^n - v_j^{n-1} - \epsilon \Delta t^2 (v_j^n)^3 \quad (4.10)$$

4.2.2 Initialisation du schéma

Pour approcher $v(0, x_j)$, on prend le même schéma comme le problème retourné linéaire.

Pour le problème retourné non linéaire 'exact' (4.1), on prend

$$\begin{aligned} v_j^1 = & u_j^{L-1} - \frac{\beta}{2}(u_{j+1}^L - 2u_j^L + u_{j-1}^L) + \frac{\Delta t^2}{2}(u_j^L + \epsilon(u_j^L)^3) \\ & + \frac{\beta}{2}(v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0) - \frac{\Delta t^2}{2}(v_j^0 + \epsilon(v_j^0)^3) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour le problème retourné non linéaire 'sans changement de vitesse' (4.2), on prend

$$\begin{aligned} v_j^1 = & 2u_j^L - u_j^{L-1} + \frac{\beta}{2}(u_{j+1}^L - 2u_j^L + u_{j-1}^L) - \frac{\Delta t^2}{2}(u_j^L + \epsilon(u_j^L)^3) \\ & + \frac{\beta}{2}(v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0) - \frac{\Delta t^2}{2}(v_j^0 + \epsilon(v_j^0)^3) \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.2.3 Discrétisation de la condition aux limites

On prend le même schéma comme le problème retourné linéaire.

4.2.4 Comportement de la solution retourné non linéaire

Proposition 4.4. Soient v_ϵ^e la solution du problème retourné non linéaire 'exact' (4.8) et u^ϵ la solution du problème non linéaire (3.1) ou (3.2). Alors

$$\boxed{v_\epsilon^e(T, x) = u^\epsilon(0, x)}$$

Preuve. La démonstration est identique à celle de la proposition 4.1. \square

Théorème 4.5. Soient v^ϵ la solution du problème retourné non linéaire 'sans changement de vitesse' (4.9), et u^ϵ la solution du problème non linéaire (3.1) ou (3.2). Alors il existe une constante C telle que

$$\boxed{\int_0^1 (v^\epsilon(T, x) - u^\epsilon(0, x))^2 dx \leq \frac{2}{1 - C\epsilon} \int_0^1 \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx}$$

Théorème 4.6. De plus si u^ϵ est la solution du problème non linéaire avec

la condition d'impédance (3.2), alors $\boxed{\int_0^1 (v^\epsilon(T, x) - u^\epsilon(0, x))^2 dx \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0}$

Preuve du théorème 4.5. Soit $R^\epsilon(t, x) = v^\epsilon(t, x) - v_\epsilon^e(t, x)$, où v_ϵ^e est la solution de (4.8) et v^ϵ est la solution de (4.9). R^ϵ vérifie

$$\begin{cases} KR^\epsilon + \epsilon(R^\epsilon)^3 = 3\epsilon v_\epsilon^e v^\epsilon R^\epsilon & , \forall (t, x) \in \Omega \\ R^\epsilon(0, x) = 0 & , \forall x \in [0, 1] \\ \frac{\partial R^\epsilon}{\partial t}(0, x) = 2 \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(T, x) & , \forall x \in [0, 1] \\ R^\epsilon(t, 0) = R^\epsilon(t, 1) = 0 & , \forall t \in [0, T] \end{cases}$$

On multiplie $KR^\epsilon + \epsilon(R^\epsilon)^3 = 3\epsilon v_\epsilon^\epsilon v^\epsilon R^\epsilon$ par $\frac{\partial R^\epsilon}{\partial t}$, et on intègre sur $(0, 1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathcal{E}[R^\epsilon](t)) &= \frac{C\epsilon}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 (R^\epsilon)^2 dx \right), \text{ avec } C = \|v_\epsilon^\epsilon\|_\infty \cdot \|v^\epsilon\|_\infty \\ \mathcal{E}[R^\epsilon](t) - \mathcal{E}[R^\epsilon](0) &= C\epsilon \left(\int_0^1 (R^\epsilon(t, x))^2 dx - \int_0^1 (R^\epsilon(0, x))^2 dx \right) \\ \mathcal{E}[R^\epsilon](t) - 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx &= C\epsilon \int_0^1 (R^\epsilon(t, x))^2 dx \\ \int_0^1 (R^\epsilon(t, x))^2 dx - 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx &\leq C\epsilon \int_0^1 (R^\epsilon(t, x))^2 dx \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (v^\epsilon(T, x) - v_\epsilon^\epsilon(T, x))^2 dx \leq \frac{2}{1 - C\epsilon} \int_0^1 \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx$$

On a donc $\int_0^1 (v^\epsilon(T, x) - u^\epsilon(0, x))^2 dx \leq \frac{2}{1 - C\epsilon} \int_0^1 \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx$. \square

Preuve du théorème 4.6. Si u^ϵ est la solution du problème non linéaire avec la condition d'impédance (3.2), alors d'après la conjecture 2.2

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc $\int_0^1 (v^\epsilon(T, x) - u^\epsilon(0, x))^2 dx \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$. \square

Chapitre 5

Résultats numériques

On donne dans ce chapitre quelques résultats numériques sur le problème linéaire, non linéaire et les problèmes retournés associés. On teste le schéma numérique premièrement avec la condition initiale (terme source) d'une fonction propre

$$\begin{cases} u(0, x) = a \sin(k\pi x) \cos \varphi \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = -\omega a \sin(k\pi x) \sin \varphi \end{cases} \quad (5.1)$$

et ensuite avec celle d'une fonction gaussienne ($\sigma = 2h \ll 1$) centrée en $x = 1/4$

$$\begin{cases} u(0, x) = g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x-1/4)^2/2\sigma^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Problème linéaire : on compare la solution exacte avec la solution numérique donnée par le schéma.

Problème non linéaire : on compare la solution approchée donnée par le développement asymptotique avec la solution numérique donnée par le schéma.

Problèmes retournés : pour le problème linéaire, on vérifie théoriquement la proposition 4.1, le théorème 4.2, le théorème 4.3, et on compare numériquement la solution du problème retourné 'sans changement de vitesse' à l'instant final $v(T, x)$ avec la condition initiale $u(0, x)$. Pour le problème non linéaire, on vérifie théoriquement la proposition 4.4, le théorème 4.5, le théorème 4.6, et on compare numériquement la solution du problème retourné non linéaire 'sans changement de vitesse' à l'instant final $v^\epsilon(T, x)$ avec la condition initiale $u^\epsilon(0, x)$.

On choisit des constantes ci-dessous pour tester le schéma numérique

$$\alpha = 0.5, \quad z = 0.5, \quad a = 3, \quad k = 1, \quad \varphi = 0 \\ \omega = \sqrt{1 + k^2\pi^2}, \quad T' = 2\pi/\omega \text{ (la période).}$$

Remarque. Le test du développement asymptotique avec la condition initiale (5.1), on prend $\varphi = 0$ pour qu'on a la même condition initiale pour $u_0, u_{NAIF}, u_\phi, u_{\phi_0}$.

5.1 Résultats du problème linéaire

Soient u la solution du problème linéaire (2.1), v_e la solution du problème retourné exact (4.1), v la solution du problème retourné sans changement de vitesse (4.2).

5.1.1 Résultats du problème avec la condition initiale (5.1)

Le cas 1. $N=100, T=T'$

L'estimation d'erreur en norme L^2 entre la solution exacte et approchée.

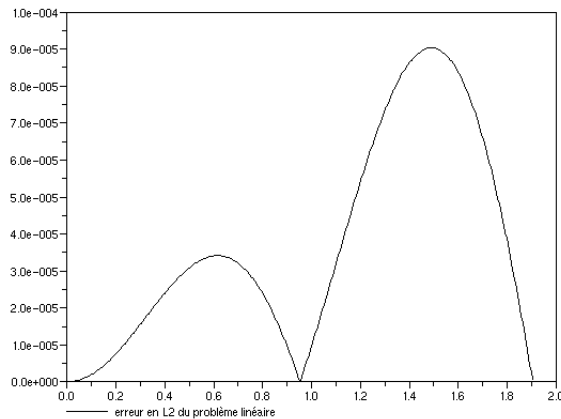


FIG. 5.1 – L'erreur en L^2

Le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène ($v_e(T, x) = u(0, x)$), T est un multiple de la période ($\partial_t u(T, x) \approx 0$), on a la bonne approximation $v(T, x) \approx u(0, x)$.

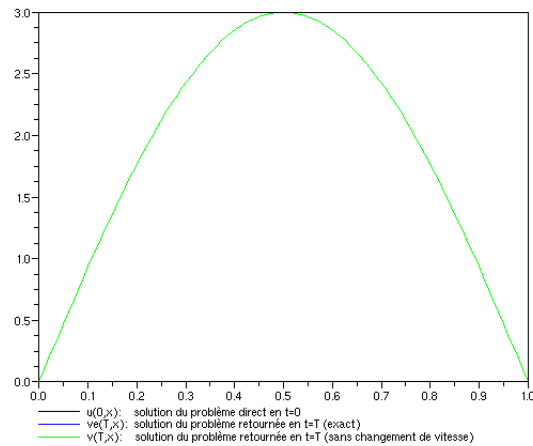


FIG. 5.2 – Dirichlet homogène → Dirichlet homogène

Le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance ($v_e(T, x) = u(0, x)$), T est petit.

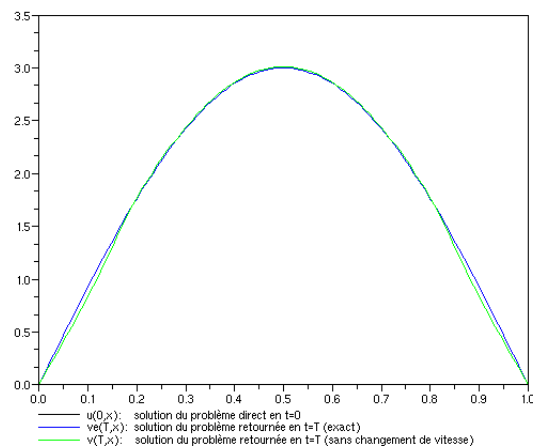


FIG. 5.3 – Impédance → Dirichlet non homogène

Le cas 2. $N=100$, $T=10.1T'$

Le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène ($v_e(T, x) = u(0, x)$), T n'est pas un multiple de la période ($\partial_t u(T, x) \neq 0$), on n'a plus la bonne approximation $v(T, x) \neq u(0, x)$.

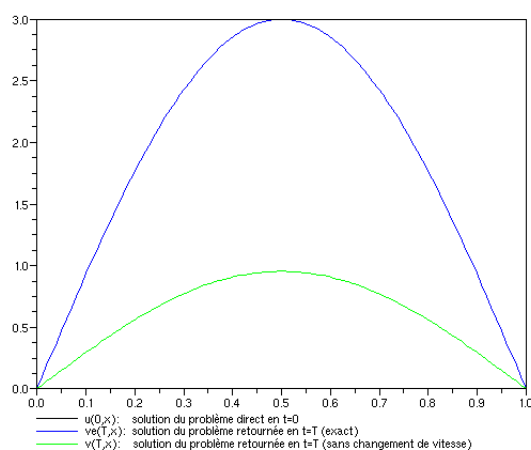


FIG. 5.4 – Dirichlet homogène \rightarrow Dirichlet homogène

Le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance ($v_e(T, x) = u(0, x)$), T est grand ($E[u](T) \rightarrow 0$), on a la bonne approximation $v(T, x) \approx u(0, x)$.

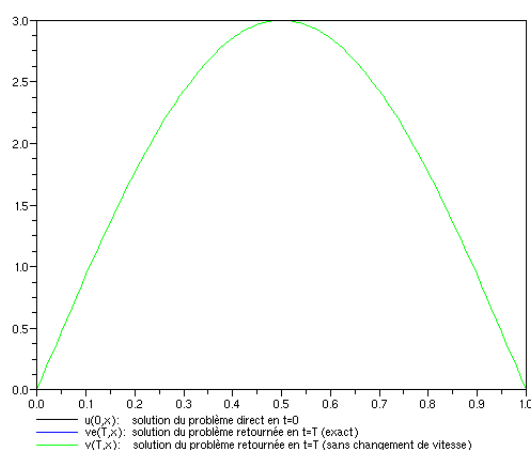


FIG. 5.5 – Impédance \rightarrow Dirichlet non homogène

5.1.2 Résultats du problème avec la condition initiale (5.2)

Le cas 3. $N=100$, $T=1$

Le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène ($v_e(T, x) = u(0, x)$), T est petit.

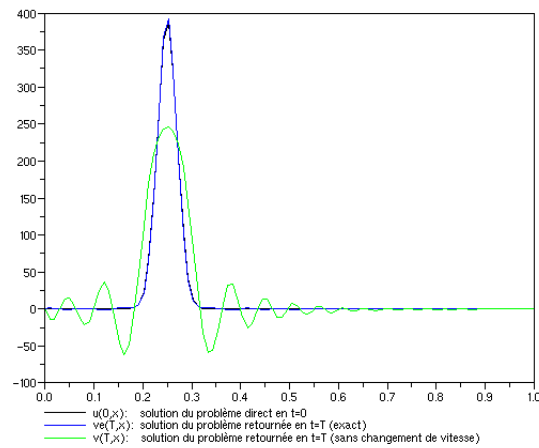


FIG. 5.6 – Dirichlet homogène \rightarrow Dirichlet homogène

Le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance ($v_e(T, x) = u(0, x)$), T est petit.

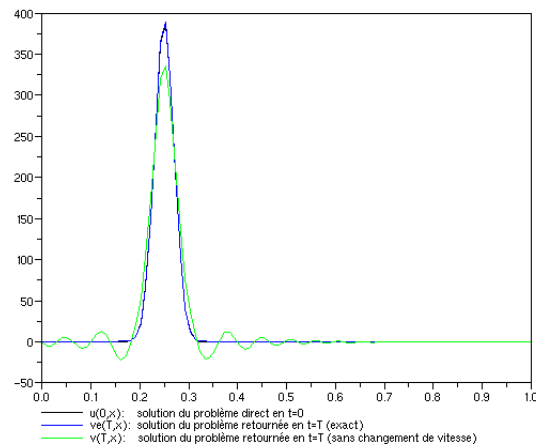


FIG. 5.7 – Impédance \rightarrow Dirichlet non homogène

Le cas 4. $N=100$, $T=10$

Le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène ($v_e(T, x) = u(0, x)$), T est grand.

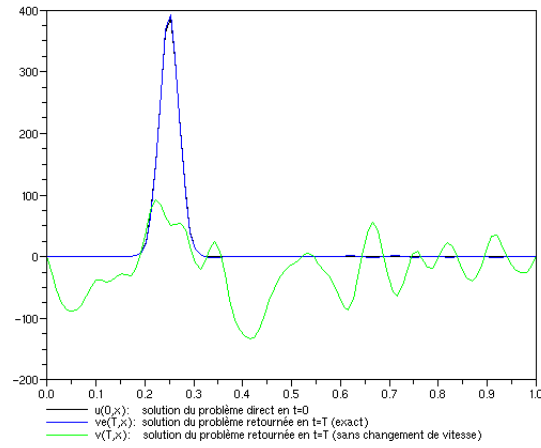


FIG. 5.8 – Dirichlet homogène → Dirichlet homogène

Le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance ($v_e(T, x) = u(0, x)$), T est grand ($E[u](T) \rightarrow 0$), on a la bonne approximation $v(T, x) \approx u(0, x)$.

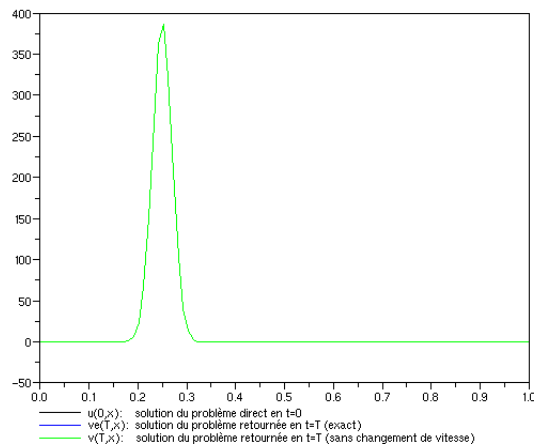


FIG. 5.9 – Impédance → Dirichlet non homogène

5.2 Résultats du problème non linéaire

Soient u^ϵ la solution du problème non linéaire (3.1), u_0 la solution exacte du problème linéaire (2.1)-(2.2), u_{NAIF} une solution approchée du problème non linéaire vérifiée (3.9), u_ϕ une solution approchée du problème non linéaire vérifiée (3.25), et u_{ϕ_0} vérifiée (3.26), v_e la solution du problème retourné exact (4.8), v la solution du problème retourné sans changement de vitesse (4.9).

5.2.1 Résultats du problème non linéaire avec la condition initiale (5.1)

Résultats du développement asymptotique

Le cas 5. $\epsilon=0.1$, $N=100$, $T=3$

L'estimation d'énergie $E[u^\epsilon - u_{\phi_0}]$, $E[u^\epsilon - u_\phi]$, $E[u^\epsilon - u_{NAIF}]$ sont meilleures que $E[u^\epsilon - u_0]$ jusqu'à T .

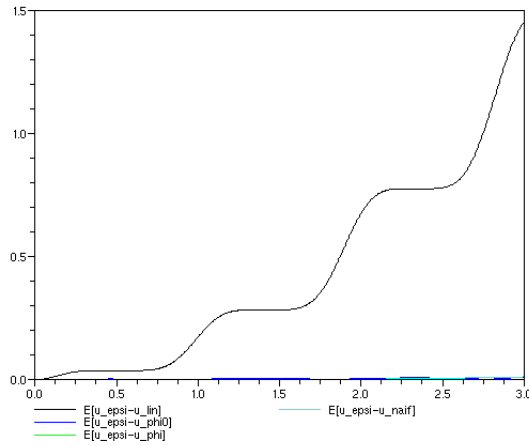


FIG. 5.10 – $E[u^\epsilon - u_0]$, $E[u^\epsilon - u_{\phi_0}]$, $E[u^\epsilon - u_\phi]$, $E[u^\epsilon - u_{NAIF}]$

Le cas 6. $\epsilon=0.1$, $N=100$, $T=3/\epsilon$

L'estimation d'énergie $E[u^\epsilon - u_{NAIF}]$ n'est plus meilleure que $E[u^\epsilon - u_0]$ en T .

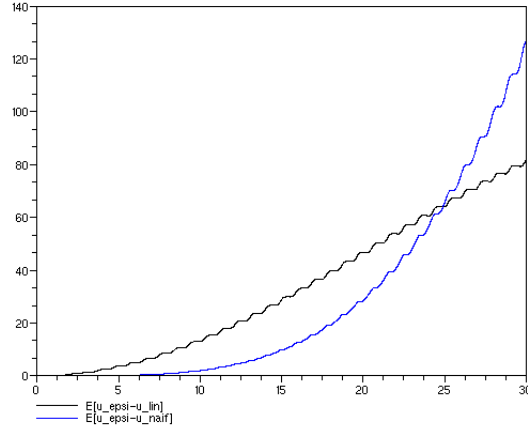


FIG. 5.11 – $E[u^\epsilon - u_0]$, $E[u^\epsilon - u_{NAIF}]$

L'estimation d'énergie $E[u^\epsilon - u_{\phi_0}]$ et $E[u^\epsilon - u_\phi]$ sont toujours bonnes et meilleures que $E[u^\epsilon - u_0]$ jusqu'à T .

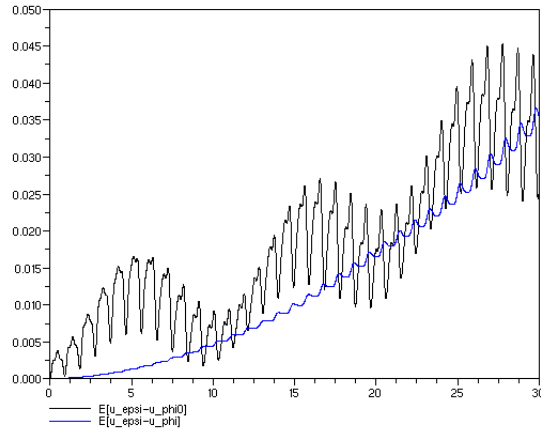


FIG. 5.12 – $E[u^\epsilon - u_{\phi_0}]$, $E[u^\epsilon - u_\phi]$

Résultats du retournement temporel

Le cas 7. $\epsilon = 0.1$, $N=100$, $T=1$

Le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène ($v_\epsilon^\epsilon(T, x) = u^\epsilon(0, x)$), T est petit

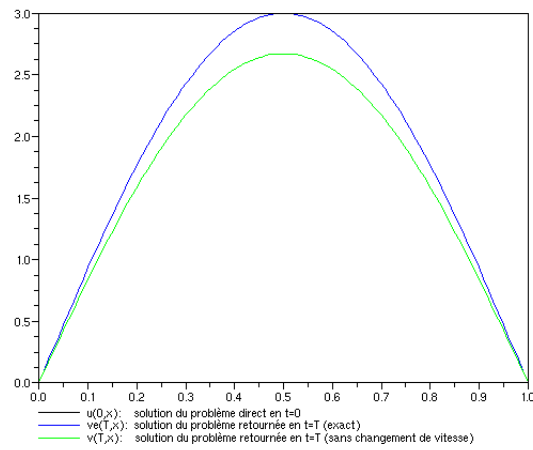


FIG. 5.13 – Dirichlet homogène \rightarrow Dirichlet homogène

Le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance ($v_\epsilon^\epsilon(T, x) = u^\epsilon(0, x)$), T est petit

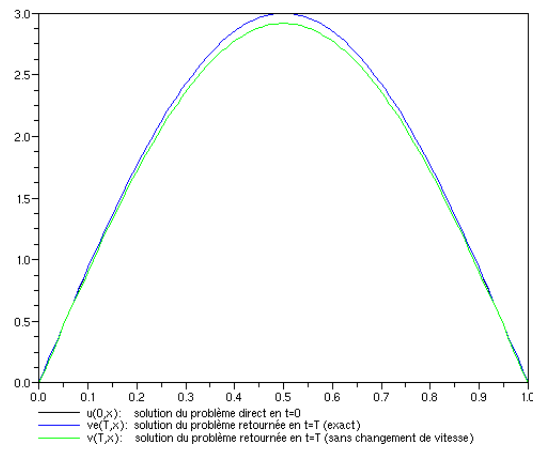


FIG. 5.14 – Impédance \rightarrow Dirichlet non homogène

Le cas 8. $\epsilon = 0.1, N=100, T=1/\epsilon$

Le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène ($v_\epsilon^\epsilon(T, x) = u^\epsilon(0, x)$), T est grand

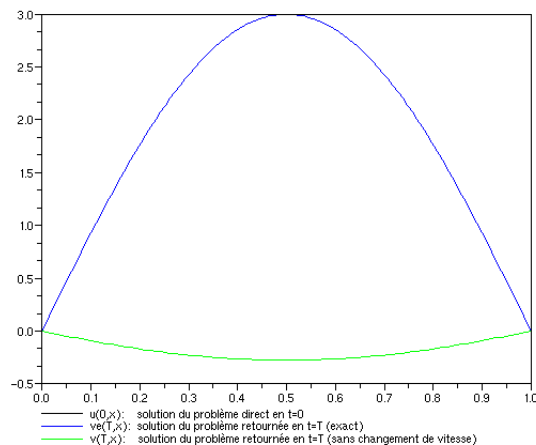


FIG. 5.15 – Dirichlet homogène \rightarrow Dirichlet homogène

Le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance ($v_\epsilon^\epsilon(T, x) = u^\epsilon(0, x)$), T est grand ($E[u^\epsilon](T) \rightarrow 0$).

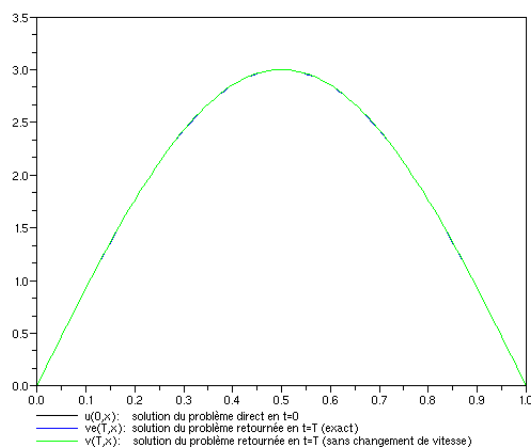


FIG. 5.16 – Impédance \rightarrow Dirichlet non homogène

5.2.2 Résultats du problème non linéaire avec la condition initiale (5.2)

Le cas 9. $\epsilon = 0.01$, $N=100$, $T=1$

Le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène ($v_e^\epsilon(T, x) = u^\epsilon(0, x)$), T est petit.

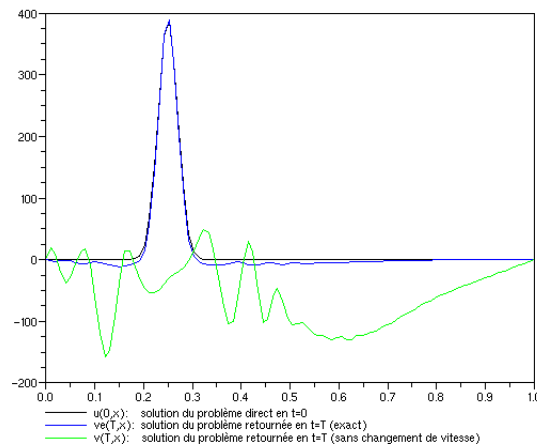


FIG. 5.17 – Dirichlet homogène \rightarrow Dirichlet homogène

Le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance ($v_e^\epsilon(T, x) = u^\epsilon(0, x)$), T est petit.

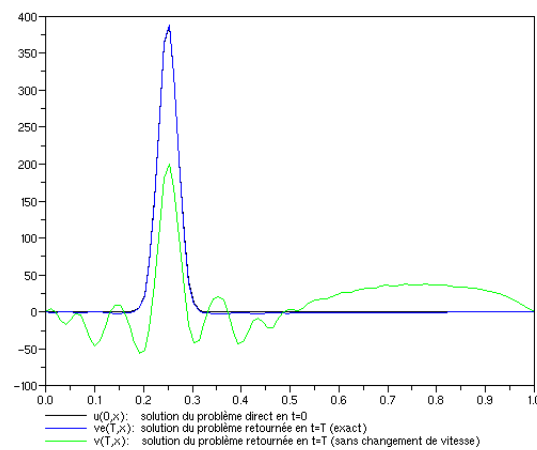


FIG. 5.18 – Impédance \rightarrow Dirichlet non homogène

Le cas 10. $\epsilon = 0.01$, $N=100$, $T=10$

Le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène ($v_\epsilon^\epsilon(T, x) = u^\epsilon(0, x)$), T est grand.

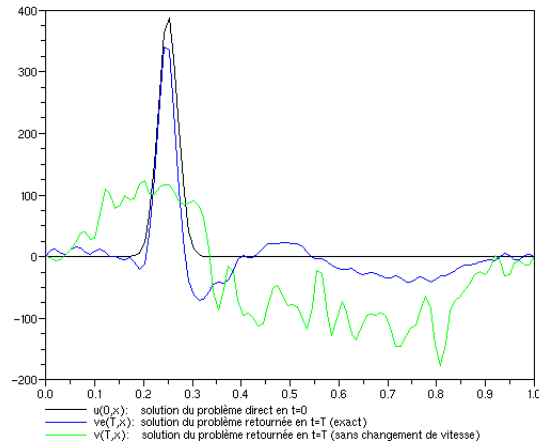


FIG. 5.19 – Dirichlet homogène \rightarrow Dirichlet homogène

Le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance ($v_\epsilon^\epsilon(T, x) = u^\epsilon(0, x)$), T est grand ($E[u^\epsilon](T) \rightarrow 0$).

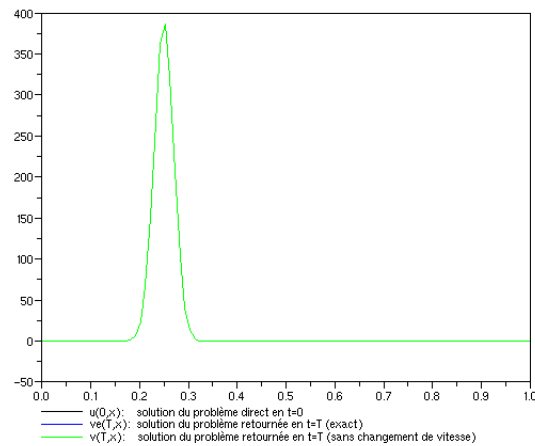


FIG. 5.20 – Impédance \rightarrow Dirichlet non homogène

Le cas 11. $\epsilon = 0.01$, $N=100$, $T=1/\epsilon$

Le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène ($v_\epsilon^\epsilon(T, x) = u^\epsilon(0, x)$), T est grand.

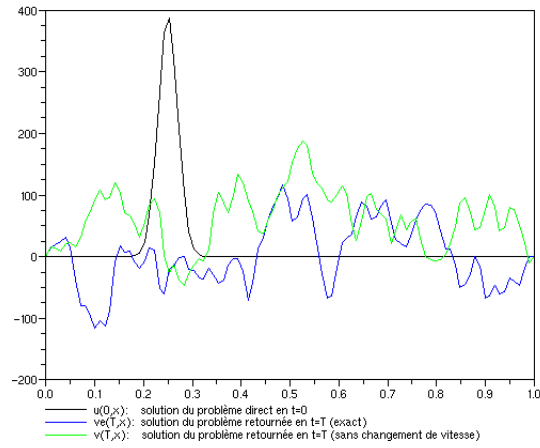


FIG. 5.21 – Dirichlet homogène \rightarrow Dirichlet homogène

Le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance, T est grand ($E[u^\epsilon](T) \rightarrow 0$).

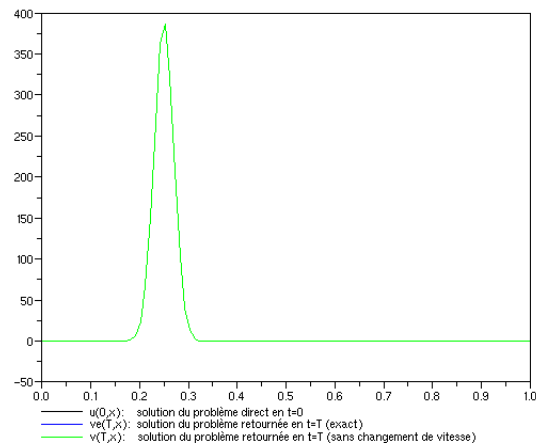


FIG. 5.22 – Impédance \rightarrow Dirichlet non homogène

Chapitre 6

Conclusion

D'après les résultats ci-dessus, on voit que le développement asymptotique simple d'un mode propre ne marche jusqu'au T fixé. Par contre, le développement avec une phase marche bien jusqu'au grand temps, par exemple $T = n/\epsilon$. On a aussi les résultats sur le retournement temporel du problème linéaire et non linéaire. On trouve que le retournement temporel (Dirichlet non homogène) du problème avec la condition d'impédance ne marche que pour le grand temps ($T \rightarrow +\infty$). Dans ce cas, on a la bonne approximation et la bonne localisation du terme source $v(T, x) \approx u(0, x)$. Mais on n'a pas ce résultat pour le retournement temporel du problème avec la condition de Dirichlet homogène. Ce retournement temporel marche bien pour le cas particulier, si on teste avec la condition initiale d'une fonction propre (5.1) et avec T est un multiple de la période. Donc pour le grand temps ($T \rightarrow +\infty$), c'est le retournement temporel du problème avec la condition d'impédance qui nous donne le bon résultat sur l'approximation et la localisation du terme source.

Bibliographie

- [1] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri, *Méthodes Numériques*. Springer-Verlag Italia, Milano 2007.
- [2] C.Bardos et M.Fink, *Mathematical foundations of the time reversal mirror*, Asymptotic Analysis, 29 (2002) 157-182
- [3] D.Euvrard, *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1987, 1990.
- [4] E.Bécache, *Schémas numériques pour la résolution de l'équation des ondes*. ENSTA, Septembre 2003.
- [5] Gary C.Cohen, *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [6] Haïm Brézis, *Analyse fonctionnelle*. Dunod, Paris, 1999.
- [7] J.Kevorkian and J.Cole, *Multiple Scale and Singular Perturbations Problems*. Applied Mathematical Sciences, volume 114, Springer, Berlin, 1996.
- [8] J.Kevorkian, J.Cole, Julian D., *Perturbation methods in applied mathematics*. Applied Mathematical Sciences, 34 Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.
- [9] Lionel Sainsaulieu, *Calcul scientifique*. Dunod, Paris, 2002.
- [10] Nayfeh, Ali Hasan, *Introduction to perturbation techniques*. Wiley-Interscience[John Wiley, Sons], New York, 1981.
- [11] Peter D.Miller, *Applied Asymptotic Analysis*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, volume 75, ch 9-10, 2006.
- [12] S.Junca, B.Rousselet, *The Method of Strained Coordinates for Vibrations with Weak Unilateral Springs*. preprint 2009.
- [13] Sokly Heng, *Retournement temporel*, Mémoire Master 1 de Mathématiques, 2008.

Annexe

Solution du problème linéaire avec la condition de Dirichlet

```
// Solution du problème linéaire avec la condition
// de Dirichlet sans terme source
// l0,l1: les conditions initiales
// alpha: le rapport dt/dx
// N: le nombre de points en espace [0,1]
// T: la valeur de temps
// u: une matrice de taille L*N
// t: un vecteur de taille L
// x: un vecteur de taille N
function [u,t,x]=KGL_Dir(l0,l1,alpha,N,T)
    dx=1/(N-1); dt=alpha*dx; x=0:dx:1;
    t=0:dt:T; L=length(t); betta=alpha^2;
    u=zeros(L,N); // initialiser la matrice u
    // condition initiale en t=0
    for j=2:(N-1)
        u(1,j)=l0((j-1)*dx);
    end
    // condition initiale en t=dt
    for j=2:(N-1)
        u(2,j)=u(1,j)+dt*l1((j-1)*dx)+(betta/2)
            *(u(1,j+1)-2*u(1,j)+u(1,j-1))-(dt^2/2)*u(1,j);
    end
    // schéma numérique
    for i=3:L // indice de temps
        for j=2:(N-1) // indice d'espace
            u(i,j)=betta*u(i-1,j-1)+(2-2*betta-dt^2)
                *u(i-1,j)+betta*u(i-1,j+1)-u(i-2,j);
        end
    end
end endfunction
```

Le cas avec le terme source

```
// Solution du problème linéaire avec la condition
// de Dirichlet et avec terme source 'G(t,x)'
// alpha: le rapport dt/dx
// N: le nombre de points en espace [0,1]
// T: la valeur de temps
// u: une matrice de taille L*N
// t: un vecteur de taille L
// x: un vecteur de taille N
function [u,t,x]=KGLG_Dir(G,alpha,N,T)
    dx=1/(N-1); dt=alpha*dx; x=0:dx:1;
    t=0:dt:T; L=length(t); betta=alpha^2;
    u=zeros(L,N); // initialiser la matrice u
    // schéma numérique
    for i=3:L // indice de temps
        for j=2:(N-1) // indice d'espace
            u(i,j)=betta*u(i-1,j-1)+(2-2*betta-dt^2)
                *u(i-1,j)+betta*u(i-1,j+1)-u(i-2,j)
                +dt^2*G((i-1)*dt,(j-1)*dx);
        end
    end
endfunction
```

Solution du problème linéaire avec la condition d'impédance

```
// Solution du problème linéaire avec la condition
// d'impédance sans terme source
// l0,l1: les conditions initiales
// z: le coefficient d'impédance
// alpha: le rapport dt/dx
// N: le nombre de points en espace [0,1]
// T: la valeur de temps
// u: une matrice de taille L*N
// t: un vecteur de taille L
// x: un vecteur de taille N
function [u,t,x]=KGL_Imp(l0,l1,z,alpha,N,T)
    dx=1/(N-1); dt=alpha*dx; x=0:dx:1;
    t=0:dt:T; L=length(t); betta=alpha^2;
    u=zeros(L,N); // initialiser la matrice u
    // condition initiale en t=0
    for j=1:N
```

```

    u(1,j)=l0((j-1)*dx);
end
// condition initiale en t=dt
for j=2:(N-1)
    u(2,j)=u(1,j)+dt*l1((j-1)*dx)+(beta/2)
        *(u(1,j+1)-2*u(1,j)+u(1,j-1))-(dt/2)*u(1,j);
end
    u(2,1)=u(1,1)+dt*l1(0)+(beta/2)*(u(1,3)
        -2*u(1,2)+u(1,1))-(dt^2/2)*u(1,1);
u(2,N)=u(1,N)+dt*l1(1)+(beta/2)*(u(1,N-2)
    -2*u(1,N-1)+u(1,N))-(dt^2/2)*u(1,N);
// schéma numérique
for i=3:L // indice de temps
    for j=2:(N-1) // indice d'espace
        u(i,j)=beta*u(i-1,j-1)+(2-2*beta-dt^2)
            *u(i-1,j)+beta*u(i-1,j+1)-u(i-2,j);
    end
    // condition d'impédance aux bords
    u(i,1)=(1/(alpha+z))*(2*z*alpha^2*u(i-1,2)
        +z*(2-2*alpha^2-dt^2)*u(i-1,1)+(alpha-z)*u(i-2,1));
    u(i,N)=(1/(alpha+z))*(2*z*alpha^2*u(i-1,N-1)
        +z*(2-2*alpha^2-dt^2)*u(i-1,N)+(alpha-z)*u(i-2,N));
end
endfunction

```

Le cas avec le terme source

```

// Solution du problème linéaire avec la condition
// d'impédance et avec terme source 'G(t,x)'
// alpha: le rapport dt/dx
// N: le nombre de points en espace [0,1]
// T: la valeur de temps
// u: une matrice de taille L*N
// t: un vecteur de taille L
// x: un vecteur de taille N
function [u,t,x]=KGLG_Imp(G,z,alpha,N,T)
    dx=1/(N-1); dt=alpha*dx; x=0:dx:1;
    t=0:dt:T; L=length(t); beta=alpha^2;
    u=zeros(L,N); // initialiser la matrice u
    // schéma numérique
    for i=3:L // indice de temps
        for j=2:(N-1) // indice d'espace

```

```

    u(i,j)=betta*u(i-1,j-1)+(2-2*betta-dt^2)
    *u(i-1,j)+betta*u(i-1,j+1)-u(i-2,j)
    +dt^2*G((i-1)*dt,(j-1)*dx);
end
// condition d'impédance aux bords
u(i,1)=(alpha/(alpha+z))*(2*z*alpha
*(u(i-1,2)-u(i-1,1))+u(i-2,1)-(z/alpha)
*((dt^2-2)*u(i-1,1)+u(i-2,1)));
u(i,N)=(alpha/(alpha+z))*(2*z*alpha
*(u(i-1,N-1)-u(i-1,N))+u(i-2,N)-(z/alpha)
*((dt^2-2)*u(i-1,N)+u(i-2,N)));
end
endfunction

```

L'énergie discrète de Klein-Gordon

```

// Energie discrète de Klein-Gordon au cours de temps
// u: la solution numérique, une matrice de taille L*N
// alpha: le rapport dt/dx
// e: un vecteur de taille L-1
function e=Eng_KG(u,alpha)
[L,N]=size(u);h=1/(N-1); dt=alpha*h; betta=alpha^2;
for i=1:(L-1)
    e(i)=0;
    for j=2:(N-1)
        e(i)=e(i)+h*(u(i+1,j)-u(i,j))^2/(2*dt^2)
        +h*u(i+1,j)*u(i,j)/2+(2*u(i,j)-u(i,j+1)
        -u(i,j-1))*u(i+1,j)/(2*h);
    end
    // en j=1 et j=N
    U0=(betta+dt^2/2)*u(i+1,1)+(2-betta-dt^2/2)
    *u(i,1)-(betta/2)*(u(i+1,2)-u(i,2));
    UN=(betta+dt^2/2)*u(i+1,N)+(2-betta-dt^2/2)
    *u(i,N)-(betta/2)*(u(i+1,N-1)-u(i,N-1));
    e(i)=e(i)+h*(u(i+1,1)-u(i,1))^2/(2*dt^2)+h*u(i+1,1)
    *u(i,1)/2+(2*u(i,j)-u(i,2)+U0)*u(i+1,1)/(2*h);
    e(i)=e(i)+h*(u(i+1,N)-u(i,N))^2/(2*dt^2)+h*u(i+1,N)
    *u(i,N)/2+(2*u(i,N)-u(i,N-1)+UN)*u(i+1,N)/(2*h);
end
endfunction

```

Solution retournée avec la condition de Dirichlet non homogène du problème linéaire

```

// Solution retournée avec la condition de
// Dirichlet non homogène du problème linéaire
// u: la solution du problème linéaire
// alpha: le rapport dt/dx
// ve: la solution du problème retourné exact
// v : la solution du problème retourné
// sans changement de vitesse
function [ve, v]=RKGL_Dir(u, alpha)
[L,N]=size(u); dx=1/(N-1); dt=alpha*dx; betta=alpha^2;
ve=zeros(L,N); // initialiser une matrice L*N
v=ve;
// condition initiale en t=0
for j=1:N
    ve(1,j)=u(L,j);
    v(1,j)=u(L,j);
end
// condition initiale en dt
for j=2:(N-1)
    // retournement exact
    ve(2,j)=u(L-1,j)-(betta/2)*(u(L-1,j+1)-2*u(L-1,j)
    +u(L-1,j-1))+(dt^2/2)*u(L-1,j)+(betta/2)*(ve(1,j+1)
    -2*ve(1,j)+ve(1,j-1))-(dt^2/2)*ve(1,j);
    // retournement sans changement de vitesse
    v(2,j)=2*u(L,j)-u(L-1,j)+(betta/2)*(u(L-1,j+1)
    -2*u(L-1,j)+u(L-1,j-1))-(dt^2/2)*u(L-1,j)+(betta/2)
    *(v(1,j+1)-2*v(1,j)+v(1,j-1))-(dt^2/2)*v(1,j);
end
// condition de Dirichlet aux bords
ve(2,1)=u(L-1,1); ve(2,N)=u(L-1,N);
v(2,1)=u(L-1,1); v(2,N)=u(L-1,N);
// schéma numérique du problème retourné
for i=3:L // indice de temp
    for j=2:(N-1) // indice d'espace
        ve(i,j)=betta*ve(i-1,j+1)+(2-2*betta-dt^2)
        *ve(i-1,j)+betta*ve(i-1,j-1)-ve(i-2,j);
        v(i,j)=betta*v(i-1,j+1)+(2-2*betta-dt^2)
        *v(i-1,j)+betta*v(i-1,j-1)-v(i-2,j);
    end
end

```



```

    // condition de Dirichlet aux bords
    ve(i,1)=u(L-i+1,1); ve(i,N)=u(L-i+1,N);
    v(i,1)=u(L-i+1,1); v(i,N)=u(L-i+1,N);
end
endfunction

```

Discrétisation d'une fonction

```

// Discrétiser une fonction
// f: la fonction à 2 variables
// alpha: le rapport dt/dx
// N: le nombre de points en espace [0,1]
// T: la valeur de temps
// d: une matrice de taille L*N
function d=Disc(f,alpha,N,T)
    dx=1/(N-1);dt=alpha*dx;t=0:dt:T;L=length(t);
    for i=1:L // indice de temps
        for j=1:N // indice d'espace
            d(i,j)=f((i-1)*dt,(j-1)*dx);
        end
    end
end
endfunction

```

Erreur en L^2 entre la solution exacte et approchée

```

// Erreur en L2 de la solution analytique et numérique
// ue: la solution exacte, matrice de taille L*N
// ua: la solution approchée, matrice de taille L*N
// e: un vecteur de taille L
function e=L2(ue,ua)
    [L,N]=size(ue);dx=1/(N-1);
    for i=1:L // indice de temps
        n=0;
        for j=1:N // indice d'espace
            n=n+dx*(ue(i,j)-ua(i,j))^2;
        end
        e(i)=sqrt(n);
    end
end
endfunction

```

Solution du problème non linéaire avec la condition de Dirichlet

```
// Solution du problème non linéaire avec
// la condition de Dirichlet
// l0,l1: les conditions initiales
// epsi: le coefficient non linéaire
// alpha: le rapport dt/dx
// N: le nombre de points en espace [0,1]
// T: la valeur de temps
// u: une matrice de taille L*N
// t: un vecteur de taille L
// x: un vecteur de taille N
function [u,t,x]=KGNL_Dir(l0,l1,epsi,alpha,N,T)
    dx=1/(N-1);dt=alpha*dx;x=0:dx:1;
    t=0:dt:T;L=length(t);betta=alpha^2;
    u=zeros(L,N); // initialiser la matrice u
    // condition initiale en t=0
    for j=2:(N-1)
        u(1,j)=l0((j-1)*dx);
    end
    // condition initiale en t=dt
    for j=2:(N-1)
        u(2,j)=u(1,j)+dt*l1((j-1)*dx)+(betta/2)
            *(u(1,j+1)-2*u(1,j)+u(1,j-1))-(dt^2/2)
            *u(1,j)-epsi*dt^2*(u(1,j))^3;
    end
    // schéma numérique
    for i=3:L // indice de temps
        for j=2:(N-1) // indice d'espace
            u(i,j)=betta*u(i-1,j-1)+(2-2*betta-dt^2)
                *u(i-1,j)+betta*u(i-1,j+1)-u(i-2,j)
                -epsi*dt^2*(u(i-1,j))^3;
        end
    end
endfunction
```

Solution du problème non linéaire avec la condition d'impédance

```
// Solution du problème non linéaire
// avec la condition d'impédance
// l0,l1: les conditions initiales
// epsi: le coefficient non linéaire
```

```

// alpha: le rapport dt/dx
// N: le nombre de points en espace [0,1]
// T: la valeur de temps
// u: une matrice de taille L*N
// t: un vecteur de taille L
// x: un vecteur de taille N
function [u,t,x]=KGNL_Imp(l0,l1,epsi,z,alpha,N,T)
    dx=1/(N-1);dt=alpha*dx;x=0:dx:1;
    t=0:dt:T;L=length(t);betta=alpha^2;
    u=zeros(L,N); // initialiser la matrice u
    // condition initiale en t=0
    for j=1:N
        u(1,j)=l0((j-1)*dx);
    end
    // condition initiale en t=dt
    for j=2:(N-1)
        u(2,j)=u(1,j)+dt*l1((j-1)*dx)+(betta/2)
            *(u(1,j+1)-2*u(1,j)+u(1,j-1))-(dt^2/2)
            *u(1,j)-epsi*dt^2*(u(1,j))^3;
    end
    u(2,1)=u(1,1)+dt*l1(0)+(betta/2)*(u(1,3)-2*u(1,2)
        +u(1,1))-(dt^2/2)*(u(1,1)+epsi*(u(1,1))^3);
    u(2,N)=u(1,N)+dt*l1(1)+(betta/2)*(u(1,N-2)
        -2*u(1,N-1)+u(1,N))-(dt^2/2)*(u(1,N)+epsi*(u(1,N))^3);
    // schéma numérique
    for i=3:L // indice de temps
        for j=2:(N-1) // indice d'espace
            u(i,j)=betta*u(i-1,j-1)+(2-2*betta-dt^2)*u(i-1,j)
                +betta*u(i-1,j+1)-u(i-2,j)-epsi*dt^2*(u(i-1,j))^3;
        end
        // condition d'impédance aux bords
        u(i,1)=(1/(alpha+z))*(2*z*alpha^2*u(i-1,2)
            +z*(2-2*alpha^2-dt^2)*u(i-1,1)+(alpha-z)*u(i-2,1)
            -z*epsi*dt^2*(u(i-1,1))^3);
        u(i,N)=(1/(alpha+z))*(2*z*alpha^2*u(i-1,N-1)
            +z*(2-2*alpha^2-dt^2)*u(i-1,N)+(alpha-z)*u(i-2,N)
            -z*epsi*dt^2*(u(i-1,N))^3);
    end
endfunction

```

Solution retournée avec la condition de Dirichlet non homogène du problème non linéaire

```

// Solution retournée du problème non linéaire
// avec la condition de Dirichlet non homogène
// u: la solution du problème non linéaire
// epsi: le coefficient non linéaire
// alpha: le rapport dt/dx
// ve: la solution du problème exact
// v : la solution du problème retourné
// sans changement de vitesse
function [ve,v]=RKGNL_Dir(u,epsi,alpha)
    [L,N]=size(u);dx=1/(N-1);dt=alpha*dx;beta=alpha^2;
    ve=zeros(L,N); // initialiser une matrice L*N
    v=ve;
    // condition initiale en t=0
    for j=1:N
        ve(1,j)=u(L,j);
        v(1,j)=u(L,j);
    end
    // condition initiale en dt
    for j=2:(N-1)
        // retournement exact
        ve(2,j)=u(L-1,j)-(beta/2)*(u(L-1,j+1)-2*u(L-1,j)
        +u(L-1,j-1))+(dt^2/2)*(u(L-1,j)+epsi*(u(L-1,j))^3)
        +(beta/2)*(ve(1,j+1)-2*ve(1,j)+ve(1,j-1))
        -(dt^2/2)*(ve(1,j)+epsi*(ve(1,j))^3);
        // retournement sans changement de vitesse
        v(2,j)=2*u(L,j)-u(L-1,j)+(beta/2)*(u(L-1,j+1)
        -2*u(L-1,j)+u(L-1,j-1))-(dt^2/2)*(u(L-1,j)
        +epsi*(u(L-1,j))^3)+(beta/2)*(v(1,j+1)-2*v(1,j)
        +v(1,j-1))-(dt^2/2)*(v(1,j)+epsi*(v(1,j))^3);
    end
    // condition de Dirichlet
    ve(2,1)=u(L-1,1); ve(2,N)=u(L-1,N);
    v(2,1)=u(L-1,1); v(2,N)=u(L-1,N);
    // schéma numérique du problème retourné
    for i=3:L // indice de temps
        for j=2:(N-1) // indice d'espace
            ve(i,j)=beta*ve(i-1,j+1)+(2-2*beta-dt^2)
            *ve(i-1,j)+beta*ve(i-1,j-1)-ve(i-2,j)

```

```

    -epsi*dt^2*(v(i-1,j))^3;
    v(i,j)=betta*v(i-1,j+1)+(2-2*betta-dt^2)
    *v(i-1,j)+betta*v(i-1,j-1)-v(i-2,j)
    -epsi*dt^2*(v(i-1,j))^3;
end
// condition de Dirichlet
ve(i,1)=u(L-i+1,1); ve(i,N)=u(L-i+1,N);
v(i,1)=u(L-i+1,1); v(i,N)=u(L-i+1,N);
end
endfunction

```