

Lois de conservation scalaires : étude de
solutions particulières en dimension 1
d'espace et effet régularisant.

Mémoire de mathématiques de Pierre Castelli,
sous la direction de Stéphane Junca

Master 2 Recherche - Université de Nice

Juillet 2012

Introduction

Dans ce mémoire, on étudie un certain nombre de propriétés des lois de conservation scalaires. Le point de départ de l'étude est le travail effectué par Lax dans les années 1950. Celui-ci s'est intéressé au cas d'un flux uniformément convexe et a obtenu un certain nombre de résultats significatifs dans ce cas, notamment une formule de représentation de la solution, dite formule de Lax. Le travail mené pendant ce mémoire a consisté à reconsidérer ces résultats dans le cas de flux strictement - mais non uniformément - convexes, voire de flux non convexes, mais non linéaires (flux cubique notamment).

La première partie introduit un certain nombre de bases de la théorie des lois de conservation scalaires : solution forte/faible, condition de Rankine-Hugoniot, condition(s) d'entropie, choc, théorème d'existence et d'unicité de Kruzkov (1970) et le cas particulier pertinent de l'équation de Burgers (sans terme de viscosité).

La seconde partie présente la recherche explicite de solutions dans le cas d'un "flux puissance", d'abord strictement convexe, ensuite non convexe dans le cas du flux cubique. Cette partie combine une approche calculatoire et une approche géométrique du problème.

La troisième partie est consacrée à la formule de Lax, d'abord dans le cas des solutions régulières, ensuite dans le cas des solutions non régulières. Pour ces dernières, on présente brièvement les espaces BV^s et on cite un théorème donnant un effet régularisant, dont on montre l'optimalité.

Table des matières

1	Lois de conservation scalaires	5
1.1	Présentation du problème, définitions, propriétés	5
1.1.1	Motivation	5
1.1.1.1	Exemple issu de la physique	5
1.1.1.2	Cas plus général (toujours en physique)	5
1.1.2	Loi de conservation	6
1.1.3	Solution forte, solution faible	6
1.1.4	Condition de Rankine-Hugoniot	7
1.1.5	Condition d'entropie	7
1.1.6	Courbe de choc, solution entropique	8
1.1.7	Existence et unicité de la solution entropique	8
1.1.8	Retour à l'équation de Burgers	8
1.2	Recherche de solutions	9
1.2.1	Une méthode de résolution : les caractéristiques	9
1.2.1.1	Description de la méthode	9
1.2.1.2	Illustration dans le cas de l'équation de Burgers	10
1.2.2	Les solutions autosimilaires	10
2	Étude dans le cas d'un "flux puissance"	12
2.1	Cas du flux (strictement) convexe	12
2.1.1	Définition du flux	12
2.1.2	Condition initiale	12
2.1.2.1	Définition	12
2.1.2.2	Représentation graphique	12
2.1.3	Caractéristiques	13
2.1.3.1	Formule	13
2.1.3.2	Représentation graphique des caractéristiques	13
2.1.4	Recherche de la solution	14
2.1.5	Représentation graphique de la solution	15
2.1.6	Quelques observations sur la solution	16
2.2	Cas du flux cubique (non convexe)	16
2.2.1	Représentation graphique des caractéristiques	17
2.2.2	Recherche de la solution	17
2.2.3	Représentation graphique de la solution	18
2.2.4	Quelques observations sur la solution	19
3	Formule de Lax - Effets régularisants	20
3.1	Étude dans le cas des solutions régulières	20
3.2	Étude dans le cas des solutions non régulières	24

3.2.1	Dégénérescence du flux	24
3.2.2	Étude du minimiseur $y(x, t)$	25
3.2.3	Formule de Lax et solution faible	28
3.2.4	Effet régularisant	37
3.2.4.1	Espaces BV^s	37
3.2.4.2	Effet régularisant donné par la formule de Lax	38
3.2.5	Condition d'entropie de Lax, solution entropique	39
3.2.6	Optimalité de l'effet régularisant	44

1 Lois de conservation scalaires

1.1 Présentation du problème, définitions, propriétés

1.1.1 Motivation

1.1.1.1 Exemple issu de la physique

On considère un milieu unidimensionnel constitué de particules soumises à aucune force et se déplaçant chacune par inertie sur une droite. On désigne par $u(x, t)$ la vitesse d'une particule se trouvant à l'abscisse x à l'instant t . D'après la loi de Newton, l'accélération de la particule est nulle. Si $x = \varphi(t)$ représente la position de la particule, alors :

$$\frac{d\varphi}{dt} = u(\varphi(t), t),$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ainsi le champ de vitesses du milieu vérifie l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

que l'on peut écrire également :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0.$$

Cette équation est appelée équation de Burgers (sans terme de viscosité). Il s'agit en fait d'un cas particulier de l'expression générale d'une loi de conservation scalaire présentée au paragraphe 1.1.2.

1.1.1.2 Cas plus général (toujours en physique)

La présentation suivante est issue de l'article [11] de Lax.

On note $u = u(x, t)$ la densité d'une certaine grandeur physique et $f = f(x, t)$ le flux de cette grandeur. On dit que la grandeur considérée suit une loi de conservation si la quantité totale de cette grandeur contenue dans un domaine régulier borné \mathcal{C} varie à la vitesse à laquelle la grandeur est transportée à travers la frontière de \mathcal{C} . Cela se traduit par l'égalité ci-dessous :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} u(x, t) dx = - \int_{\partial \mathcal{C}} f \cdot n dS.$$

Le signe "moins" dans la formule est lié au fait que n désigne le vecteur normal à la frontière de \mathcal{C} dirigé vers l'extérieur.

Si u est régulière, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, le terme de gauche de l'égalité ci-dessus peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} u(x, t) dx = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx.$$

Si f est régulière, d'après le théorème de Green-Ostrogradski, le terme de droite de l'égalité ci-dessus peut être réécrit sous la forme :

$$- \int_{\partial \mathcal{C}} f \cdot n dS = - \int_{\mathcal{C}} \operatorname{div}(f) dx.$$

Ainsi l'équation de départ peut être réécrite sous la forme :

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(f) \right) dx = 0.$$

Si cette relation est valable pour n'importe quel domaine \mathcal{C} , en divisant par le volume de \mathcal{C} et en faisant tendre \mathcal{C} vers un point, on obtient l'écriture différentielle de la loi de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(f) = 0.$$

1.1.2 Loi de conservation

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times]0; +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}, \quad (1.1)$$

appelée loi de conservation scalaire en dimension 1.

Ici, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont données et $u : \mathbb{R} \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue.

1.1.3 Solution forte, solution faible

Définition 1. Une solution de classe C^1 du problème (1.1) sera appelée solution forte.

Remarque 1. Il n'existe généralement pas de solution forte de (1.1), même lorsque la donnée initiale est une fonction très régulière. On va donc introduire une notion plus générale de solution du problème (1.1) pour des fonctions moins régulières. L'idée est de donner une condition ne faisant plus intervenir les dérivées de u . Pour cela, on considère une fonction $v : \mathbb{R} \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ à support compact. En multipliant par v l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0$$

et en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) \right) v \, dx dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (uv) \Big|_{t=0} dx - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial v}{\partial t} \, dx dt - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\partial v}{\partial x} \, dx dt. \end{aligned}$$

Définition 2. On dit qu'une fonction $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0; +\infty[)$ est une solution faible de (1.1) si pour toute fonction $v : \mathbb{R} \times [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ à support compact, on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u \frac{\partial v}{\partial t} + f(u) \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 v \Big|_{t=0} dx = 0. \quad (1.2)$$

Remarque 2. On peut aussi donner une définition de solution faible de (1.1) sur $]0; +\infty[$: pour toute fonction $v : \mathbb{R} \times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ à support compact, on a :

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u \frac{\partial v}{\partial t} + f(u) \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt = 0. \quad (1.3)$$

1.1.4 Condition de Rankine-Hugoniot

On considère une solution discontinue "simple", c'est-à-dire une solution forte de l'équation (1.1) de part et d'autre d'une courbe de discontinuité \mathcal{C} de représentation paramétrique $(x(t), t)$. On note $u_d(t)$ (respectivement $u_g(t)$) la limite de $u(\cdot, t)$ à droite (respectivement à gauche) de la courbe. Le long de la courbe \mathcal{C} , la solution doit satisfaire la condition dite de Rankine-Hugoniot :

$$[f(u)] = \sigma[u], \text{ où } \begin{cases} [u] = u_d - u_g & (\text{saut de } u \text{ le long de la courbe } \mathcal{C}) \\ [f(u)] = f(u_d) - f(u_g) & (\text{saut de } f(u) \text{ le long de la courbe } \mathcal{C}) \\ \sigma = \frac{dx}{dt} & (\text{vitesse de la courbe } \mathcal{C}) \end{cases} \quad (1.4)$$

1.1.5 Condition d'entropie

On reprend les notations du paragraphe précédent.

Définition 3. On dit qu'une solution forte par morceaux (respectivement faible) vérifie la condition d'entropie (de Lax) si pour toute courbe de discontinuité \mathcal{C} :

$$a(u_g) > \sigma > a(u_d), \text{ où } a(u) = f'(u). \quad (1.5)$$

Remarque 3. On peut donner une définition plus générale de condition d'entropie : condition d'Oleinik, condition de Kruzkov (voir paragraphe 1.1.7).

1.1.6 Courbe de choc, solution entropique

Définition 4. i) Une courbe de discontinuité qui satisfait à la fois la condition de Rankine-Hugoniot (1.4) et la condition d'entropie de Lax (1.5) est appelée une courbe de choc (ou plus simplement un choc).

ii) Une solution forte par morceaux (respectivement faible) de (1.1) dont toutes les courbes de discontinuité sont des chocs est appelée une solution forte entropique (respectivement entropique) de (1.1).

1.1.7 Existence et unicité de la solution entropique

Le théorème ci-dessous, dû à Kruzkov (1970), assure l'existence et l'unicité de la solution entropique (au sens de Kruzkov).

Théorème 1. *On suppose que f est localement lipschitzienne et que u_0 est bornée. Il existe alors une unique solution $u(x, t)$ du problème (1.1) vérifiant simultanément les conditions (1.6) et (1.7) suivantes :*

- pour toute fonction convexe η ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta(u)) + \frac{\partial}{\partial x}(q(u)) \leq 0 \text{ au sens des distributions, où } q' = \eta' f'; \quad (1.6)$$

- dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x). \quad (1.7)$$

1.1.8 Retour à l'équation de Burgers

On peut donner une interprétation physique de la notion de choc, en reprenant la situation décrite au paragraphe 1.1.1.1 et l'équation de Burgers associée. Si on se donne pour condition initiale la fonction

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ 0 & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases},$$

alors la solution entropique va présenter un choc. Physiquement, la donnée u_0 correspond ici à la vitesse initiale des particules. Compte tenu de la définition de u_0 , les particules "de gauche" ($x < 0$) vont plus vite que celles "de droite" ($x \geq 0$), qui sont immobiles. Il va alors se produire un choc. De plus, la condition de Rankine-Hugoniot s'interprète ici comme la conservation de la quantité de mouvement lors d'un choc élastique entre deux particules.

Inversement, si on se donne pour condition initiale la fonction

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0; +\infty[\end{cases},$$

alors la solution entropique ne va pas présenter de choc, mais une "onde de raréfaction". Physiquement, les particules de gauche (immobiles) ne rattrapent pas celles de droite. On peut imaginer une zone où il ne se produit aucune interaction entre les particules, ce qui explique le terme de raréfaction.

1.2 Recherche de solutions

1.2.1 Une méthode de résolution : les caractéristiques

1.2.1.1 Description de la méthode

On suppose que le flux f est une fonction régulière. Si u est une solution régulière de (1.1), on peut définir les caractéristiques dans la bande $\mathbb{R} \times [0; T[$ comme étant les courbes $t \mapsto (X(t), t)$ solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = a(u(X, t)), \text{ où } a(u) = f'(u).$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(X(t), t)) &= \frac{dX}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}(X, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ &= a(u(X, t)) \frac{\partial u}{\partial x}(X, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que u est constante le long des caractéristiques, valant $u_0(x)$, où $(x, 0)$ est le pied de la caractéristique.

Ainsi :

$$\frac{dX}{dt} = a(u(X, t)) = a(u_0(x)),$$

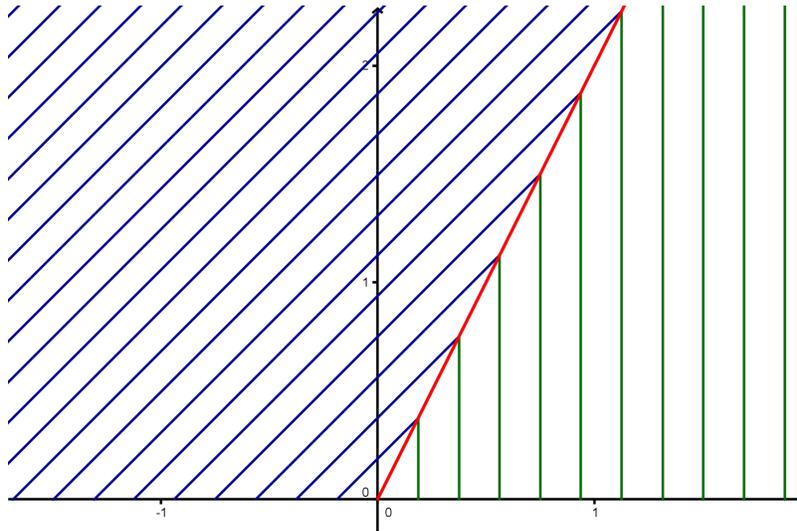
ce qui signifie que les caractéristiques sont des droites :

$$X(t) = x + t a(u_0(x)). \tag{1.8}$$

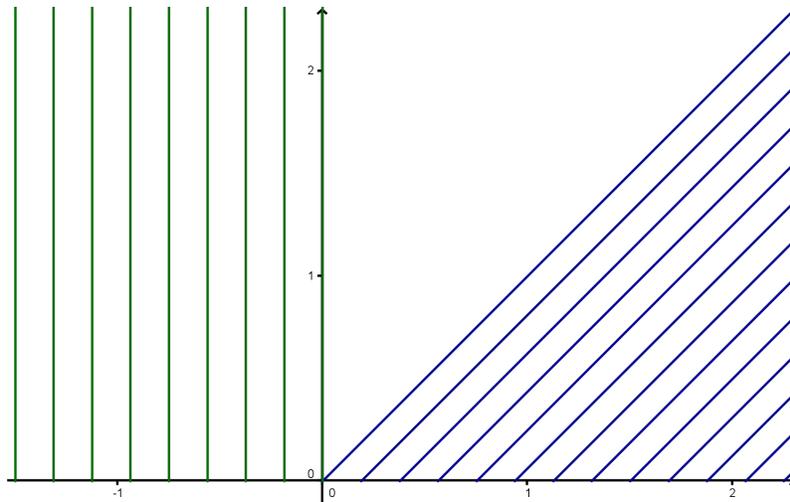
1.2.1.2 Illustration dans le cas de l'équation de Burgers

On va illustrer, à l'aide des caractéristiques, l'interprétation physique de l'équation de Burgers donnée au paragraphe 1.1.8. Sur les graphiques ci-dessous ne figurent que les caractéristiques issues de l'axe des abscisses¹.

Dans le cas de la condition initiale conduisant à un choc, on obtient la représentation graphique suivante des caractéristiques et de la courbe de choc :



Dans le cas de la condition initiale conduisant à une onde de raréfaction, on obtient la représentation graphique suivante des caractéristiques :



1.2.2 Les solutions autosimilaires

Dans le cas où la condition initiale u_0 est de la forme

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \in]-\infty ; 0[\\ u_d & \text{si } x \in [0 ; +\infty[\end{cases},$$

1. conformément à la méthode décrite au paragraphe précédent. Signalons que la notion de caractéristique peut être définie de manière plus générale.

le problème (1.1) est appelé problème de Riemann. On note u la solution entropique correspondante (cf théorème de Kruzkov).

Soit $a > 0$. On pose $v_0(x) = u_0(ax)$ et $v(x, t) = u(ax, at)$; v est la solution entropique associée à la condition initiale $v_0 = u_0$, donc par unicité de la solution entropique, $v = u$. Autrement dit, $u(x, t) = u(ax, at)$. Pour $a = t^{-1}$, on obtient :

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{t}, 1\right) = \phi\left(\frac{x}{t}\right).$$

On dit alors que u est une solution autosimilaire. Si la fonction ϕ est régulière, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0$$

se réécrit :

$$-\frac{x}{t^2}\phi'\left(\frac{x}{t}\right) + a\left(\phi\left(\frac{x}{t}\right)\right)\frac{1}{t}\phi'\left(\frac{x}{t}\right) = 0$$

ou encore :

$$\frac{1}{t}\phi'\left(\frac{x}{t}\right)\left(a(u(x, t)) - \frac{x}{t}\right) = 0.$$

Lorsque ϕ' ne s'annule pas, on a alors :

$$a(u(x, t)) = \frac{x}{t}.$$

Dans le cas où la fonction a admet une fonction réciproque b , on en déduit une expression de $u(x, t)$:

$$u(x, t) = b\left(\frac{x}{t}\right). \quad (1.9)$$

Remarque 4. Compte tenu de l'invariance par translation (en espace et en temps) de l'équation (1.1), on peut noter que : pour tout réel x_0 , pour tout réel $t_0 > 0$, la fonction

$$b_0(x, t) = b\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right)$$

est aussi solution de l'équation (1.1) pour $t > t_0$.

2 Étude dans le cas d'un "flux puissance"

2.1 Cas du flux (strictement) convexe

2.1.1 Définition du flux

On suppose dans cette partie que

$$f(u) = \frac{|u|^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \text{ avec } \alpha > 0. \quad (2.1)$$

2.1.2 Condition initiale

2.1.2.1 Définition

On s'intéresse au problème (1.1) avec la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} \text{signe}(x) |x|^{\frac{1}{\alpha}} & \text{si } x \in]-1; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.2)$$

Le choix de cette condition initiale résulte de la recherche d'une solution autosimilaire. En effet, la formule (1.9) associée au fait que $b(u) = \text{signe}(u) |u|^{\frac{1}{\alpha}}$ nous amène à considérer une solution de la forme

$$u(x, t) = \text{signe}(x) \left| \frac{x}{t} \right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

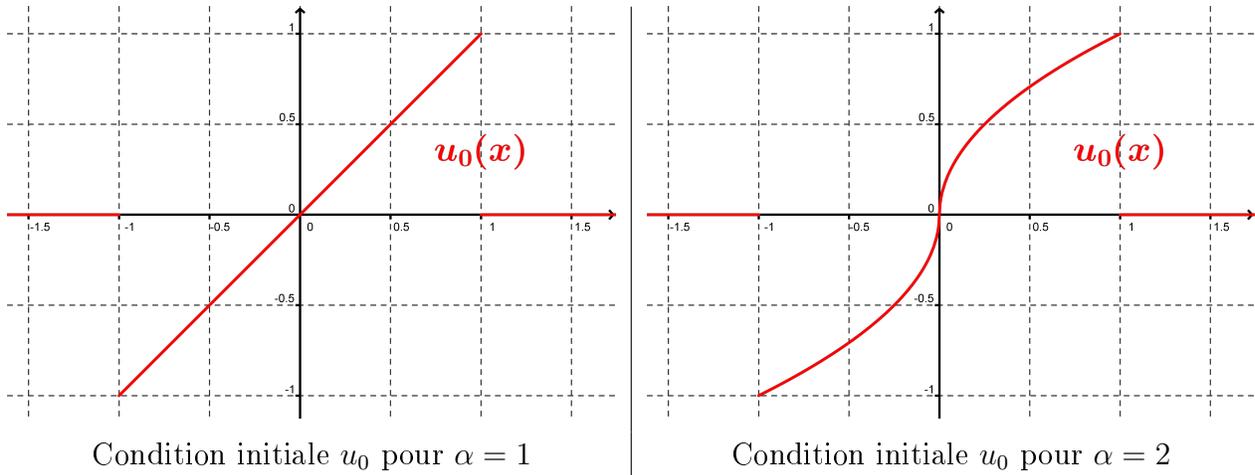
Pour éviter la singularité en $t = 0$ (on pourra se reporter à [13] pour ce cas), on va considérer, compte tenu de la remarque 4, la fonction

$$u(x, t) = \text{signe}(x) \left| \frac{x}{t+1} \right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Pour $t = 0$, on retrouve alors l'expression de la condition initiale (2.2) sur l'intervalle $] -1; 1[$. La condition initiale a été "tronquée", de manière à être intégrable (elle est même à support compact), ce qui correspond à une hypothèse habituelle dans le cadre de l'étude des lois de conservation scalaires. Dans la partie 3 notamment, on supposera dans la plupart des énoncés mathématiques que u_0 est bornée et à support compact.

2.1.2.2 Représentation graphique

On a représenté graphiquement la condition initiale pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$:



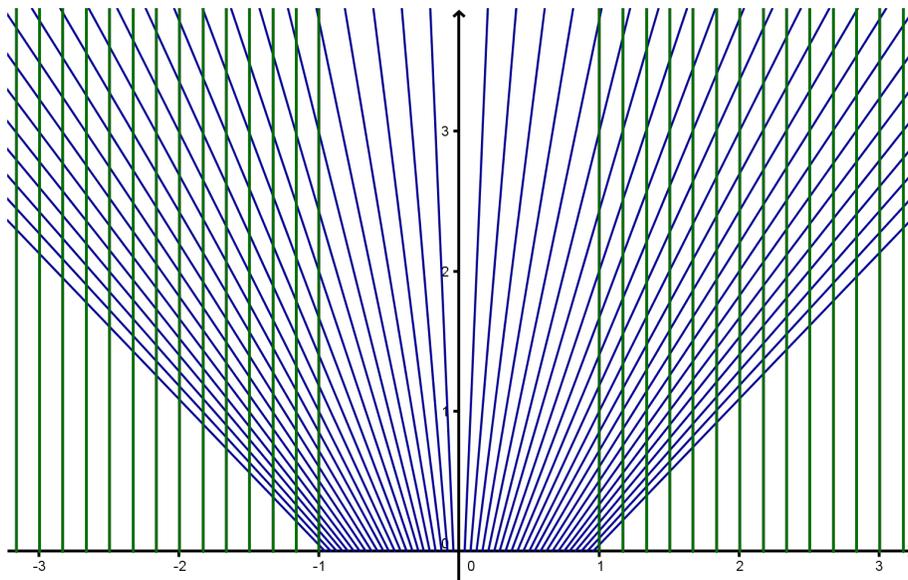
2.1.3 Caractéristiques

2.1.3.1 Formule

On a : pour tout réel u , $a(u) = \text{signe}(u) |u|^\alpha$, donc d'après (1.8), les caractéristiques sont données par :

$$\text{pour tout réel } t \geq 0, X(t) = \begin{cases} x(1+t) & \text{si } x \in]-1; 1[\\ x & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.1.3.2 Représentation graphique des caractéristiques



Les caractéristiques se croisent, il n'existe donc pas de solution forte au problème (1.1). On cherche donc une solution forte par morceaux qui admet des chocs.

2.1.4 Recherche de la solution

Proposition 1. *On suppose que le flux est une fonction paire; si la condition initiale est impaire, il en est de même de la solution forte entropique du problème (1.1), si elle existe.*

Démonstration de la proposition 1 : comme le flux f est une fonction paire, sa dérivée a est une fonction impaire. On suppose que la fonction $u(x, t)$ est la solution forte entropique du problème (1.1). On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x, t) = -u(-x, t)$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(v(x, t))) &= -\frac{\partial u}{\partial t}(-x, t) + a(v(x, t))\frac{\partial}{\partial x}(v(x, t)) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial t}(-x, t) + a(-u(-x, t))\frac{\partial}{\partial x}(-u(-x, t)) \\
&= -\frac{\partial u}{\partial t}(-x, t) - a(u(-x, t))\frac{\partial u}{\partial x}(-x, t) \\
&= -\left(\frac{\partial u}{\partial t}(-x, t) + a(u(-x, t))\frac{\partial u}{\partial x}(-x, t)\right) \\
&= -\left(\frac{\partial u}{\partial t}(-x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u))(-x, t)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De plus, $v(x, 0) = -u(-x, 0) = -u_0(-x) = u_0(x)$, puisque la condition initiale u_0 est supposée impaire. Ainsi, $v(x, t)$ est solution du problème (1.1).

Si $x(t)$ est une courbe de discontinuité de u , alors $y(t) = -x(t)$ est une courbe de discontinuité de v , et réciproquement. Pour prouver que v est une solution forte entropique du problème (1.1), il suffit donc de prouver que les conditions (1.4) et (1.5) sont vérifiées par v le long d'une courbe $y(t) = -x(t)$, où $x(t)$ est une courbe de discontinuité de u .

On a : $[f(v)] = f(v_d) - f(v_g) = f(-u_g) - f(-u_d) = f(u_g) - f(u_d) = -[f(u)]$.

De plus :

$$\sigma_y[v] = \frac{dy}{dt}(v_d - v_g) = -\sigma_x(-u_g - (-u_d)) = -\sigma_x[u].$$

Or $[f(u)] = \sigma_x[u]$, puisque la condition (1.4) est vérifiée par u le long de la courbe $x(t)$, d'où $[f(v)] = \sigma_y[v]$. Ainsi, la condition (1.4) est vérifiée par v le long de la courbe $y(t)$.

Par ailleurs, on a : $a(v_g) = a(-u_d) = -a(u_d)$, $a(v_d) = a(-u_g) = -a(u_g)$ et on sait que $a(u_g) > \sigma_x > a(u_d)$, puisque la condition (1.5) est vérifiée par u le long de la courbe $x(t)$. Ainsi, $-a(v_d) > -\sigma_y > -a(v_g)$, soit : $a(v_g) > \sigma_y > a(v_d)$, ce qui prouve que la condition (1.5) est vérifiée par v le long de la courbe $y(t)$.

Le théorème d'unicité de la solution entropique (voir paragraphe 1.1.7) nous permet alors de conclure que $u = v$, autrement dit, u est impaire.

Le flux (2.1) étant pair et la condition initiale (2.2) étant impaire, d'après la proposition 1, la solution entropique u du problème (1.1) va l'être également. On restreint donc l'étude au domaine $[0; +\infty[\times [0; +\infty[$. Au vu de la figure du paragraphe 2.1.3.2, on suppose qu'il existe une courbe de discontinuité $\mathcal{C} = (x(t), t)$ pour u , qui commence au point $(1, 0)$ et telle que

$$\begin{cases} u(x, t) = \left(\frac{x}{t+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{à gauche de } \mathcal{C} \\ u(x, t) = 0 & \text{à droite de } \mathcal{C} \end{cases}$$

En appliquant la relation (1.4), on obtient :

$$\frac{dx}{dt} = \sigma = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{0 - \frac{1}{\alpha+1} u_g^{\alpha+1}}{0 - u_g} = \frac{1}{\alpha+1} u_g^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \left(\left(\frac{x(t)}{t+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \frac{x(t)}{t+1}.$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire que l'on peut résoudre explicitement, en tenant compte de la condition initiale $x(0) = 1$:

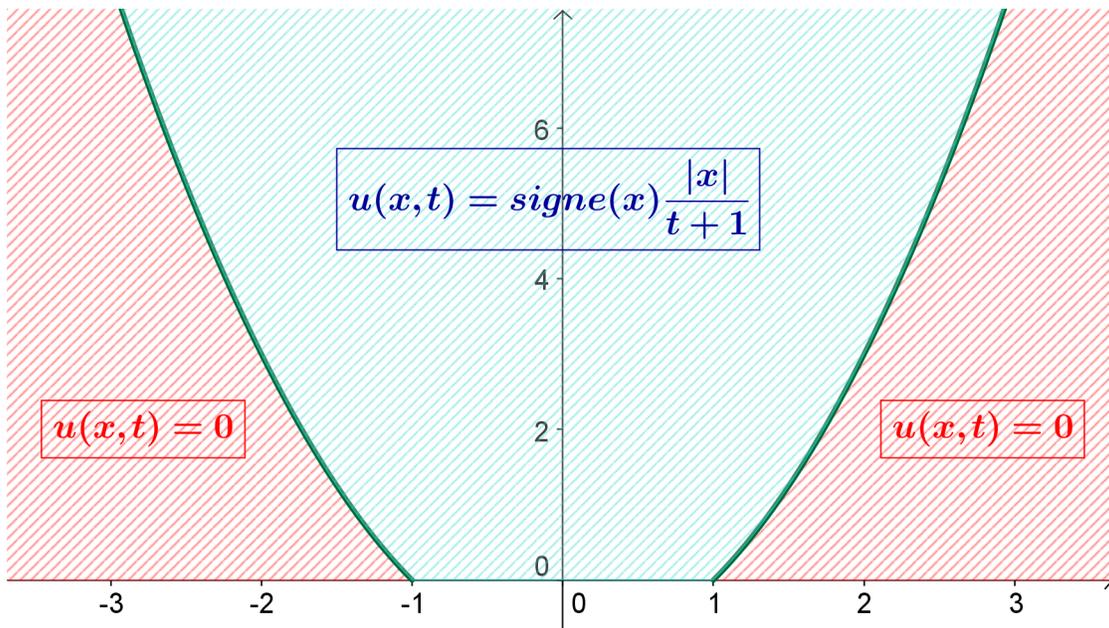
$$x(t) = (1+t)^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

Finalement on définit $u(x, t)$ de la manière suivante :

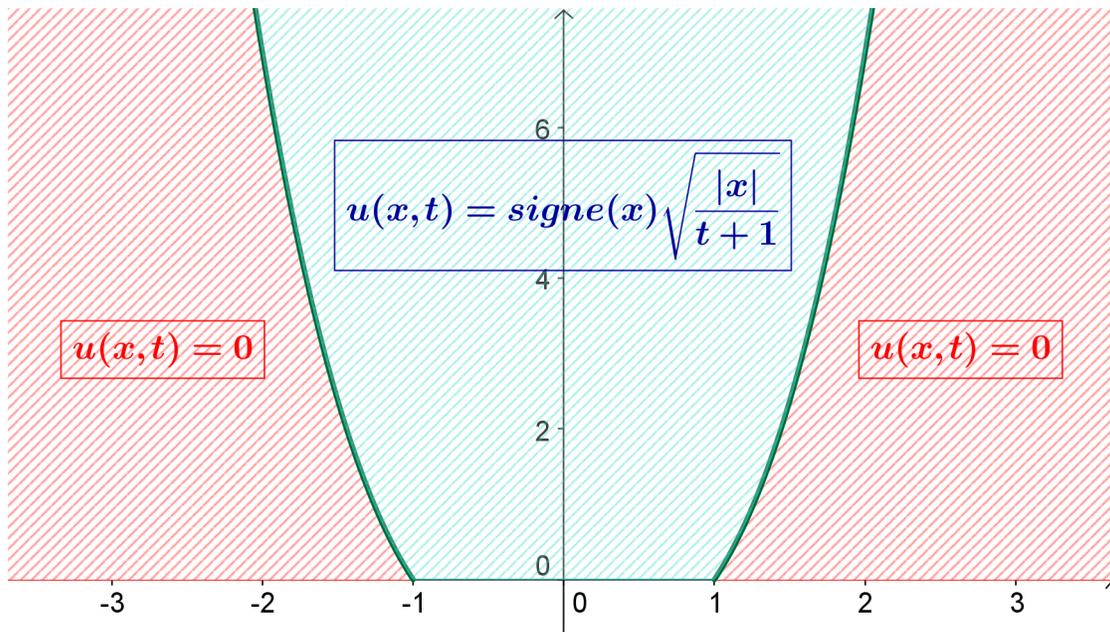
$$\begin{cases} u(x, t) = \text{signe}(x) \left(\frac{|x|}{t+1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{si } |x| < (1+t)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\ u(x, t) = 0 & \text{si } |x| > (1+t)^{\frac{1}{\alpha+1}} \end{cases}$$

2.1.5 Représentation graphique de la solution

On a représenté graphiquement la solution ainsi que la courbe de choc pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$:



Solution et courbe de choc pour $\alpha = 1$

Solution et courbe de choc pour $\alpha = 2$

2.1.6 Quelques observations sur la solution

- Support de u : pour $t \geq 0$, on a :

$$u(x,t) \neq 0 \text{ pour } |x| \leq 2(t+1)^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

- Maximum de $|u|$: pour $t \geq 0$, on a :

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |u(x,t)| = \frac{1}{(t+1)^{\frac{1}{\alpha+1}}}.$$

2.2 Cas du flux cubique (non convexe)

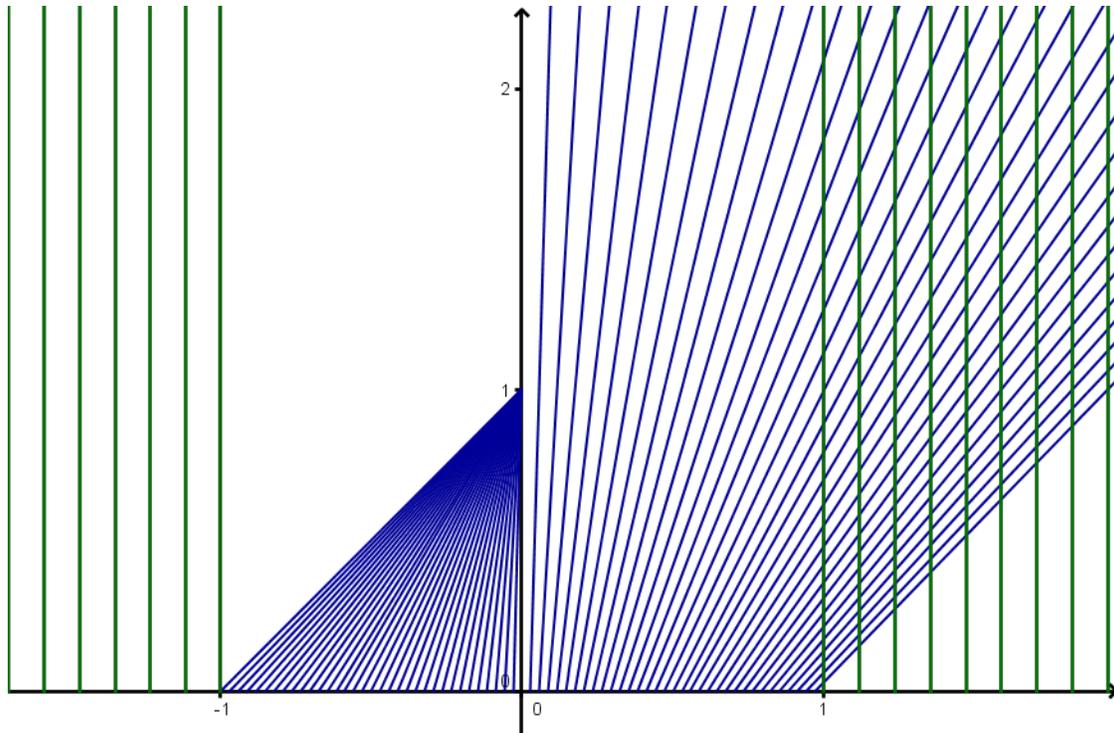
Dans cette partie, on considère le flux cubique :

$$f(u) = \frac{u^3}{3}.$$

On considère de nouveau la condition initiale (2.2), en prenant $\alpha = 2$. Autrement dit :

$$u_0(x) = \begin{cases} \text{signe}(x)\sqrt{|x|} & \text{si } x \in]-1; 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.2.1 Représentation graphique des caractéristiques



On a représenté uniquement les caractéristiques issues de l'axe des abscisses. Comme auparavant, les caractéristiques se croisent. On note par ailleurs la présence d'une "zone de vide", qui va se traduire par une onde de raréfaction.

2.2.2 Recherche de la solution

On définit $u(x, t)$ de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = 0 \quad \text{si } x < -1 \text{ ou } x > \sqrt[3]{1+t} \\ u(x, t) = -\sqrt{\frac{x}{t+1}} \quad \text{si } t-1 < x < 0 \\ u(x, t) = -\sqrt{\frac{x+1}{t}} \quad \text{si } -1 < x < \rho(t) \\ u(x, t) = \sqrt{\frac{x}{t+1}} \quad \text{si } \rho(t) < x < \sqrt[3]{1+t} \end{array} \right.$$

Dans la définition de $u(x, t)$, la courbe $\rho(t)$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = t - 1 \quad \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \rho(t) = \gamma(t) \quad \text{si } t \geq 1 \end{array} \right. ,$$

où la courbe $\gamma(t)$ est définie comme étant la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma}{t+1} - \sqrt{\frac{\gamma(\gamma+1)}{t(t+1)}} + \frac{\gamma+1}{t} \right) \quad (2.3)$$

vérifiant la condition initiale $\gamma(1) = 0$.

Cette équation différentielle est obtenue en appliquant la relation (1.4) et en utilisant l'égalité :

$$v^3 + w^3 = (v+w)(v^2 - vw + w^2).$$

Sachant que pour tous réels positifs v et w , $v - \sqrt{vw} + w = (\sqrt{v} - \sqrt{w})^2 + \sqrt{vw} \geq 0$, on déduit de (2.3) que :

$$\frac{d\gamma}{dt} \geq 0.$$

Ainsi γ est croissante sur $[1; +\infty[$. En particulier, $\gamma(t) \geq \gamma(1)$, soit : $\gamma(t) \geq 0$.

Dans l'équation (2.3), on a :

$$\frac{\gamma}{t+1} - \sqrt{\frac{\gamma(\gamma+1)}{t(t+1)}} = \sqrt{\frac{\gamma}{t+1}} \left(\sqrt{\frac{\gamma}{t+1}} - \sqrt{\frac{\gamma+1}{t}} \right) \leq 0.$$

Ainsi :

$$\frac{d\gamma}{dt} \leq \frac{1}{3} \frac{\gamma+1}{t}.$$

D'après une propriété sur les sur-solutions d'une équation différentielle ordinaire (que l'on peut trouver par exemple dans [8]) et après résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} \frac{y+1}{t} \text{ et } y(1) = 0,$$

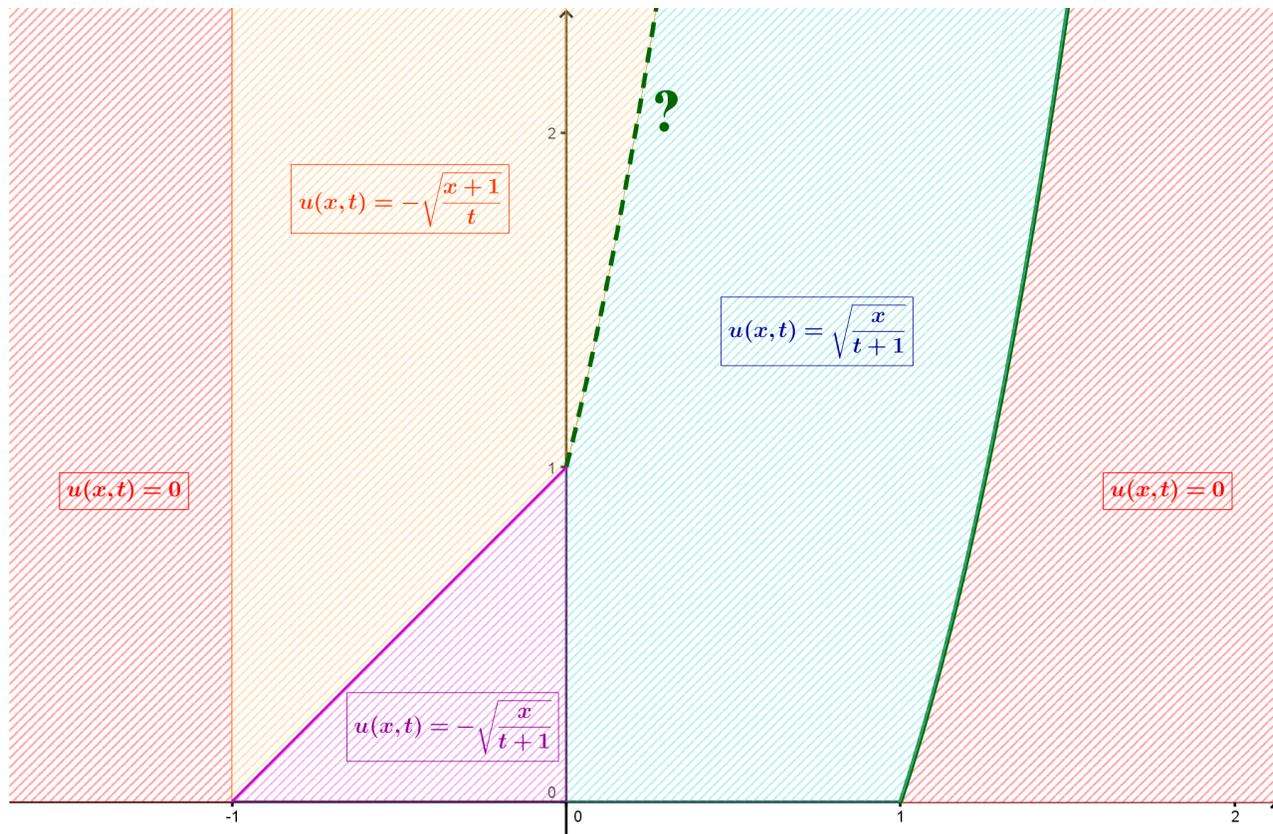
on en déduit qu'on a l'inégalité :

$$\gamma(t) \leq -1 + \sqrt[3]{t}.$$

En particulier, les deux courbes de choc ne se coupent pas.

2.2.3 Représentation graphique de la solution

On a représenté graphiquement la solution ainsi que les courbes de choc :



2.2.4 Quelques observations sur la solution

- Support de u : pour $t \geq 0$, on a :

$$u(x,t) \neq 0 \text{ pour } -1 \leq x \leq \sqrt[3]{1+t}.$$

- Maximum de u : pour $t > 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+t}} \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{t}}.$$

En particulier :

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |u(x,t)| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}.$$

Remarque 5. On constate donc que, pour la même condition initiale (2.2), les estimations concernant le maximum et la taille du support de la solution sont du même ordre que dans le cas du flux cubique convexe étudié au paragraphe 2.1.

3 Formule de Lax - Effets régularisants

3.1 Étude dans le cas des solutions régulières

Lemme 1. *Soit h une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I . Si l'ensemble $\{x \in I \mid h'(x) = 0\}$ est de mesure nulle, alors h est strictement croissante sur I .*

Démonstration du lemme 1 : on va démontrer la contraposée. On suppose h non strictement croissante sur I . Comme h est croissante sur I , il existe donc deux réels a et b de I tels que $a < b$ et $h(a) = h(b)$. La fonction h est donc constante sur $[a; b]$. Ainsi : pour tout réel $x \in [a; b]$, $h'(x) = 0$. On a : $[a; b] \subset \{x \in I \mid h'(x) = 0\}$ et donc l'ensemble $\{x \in I \mid h'(x) = 0\}$ est de mesure strictement positive.

Dans le livre [12], Lax donne une formule explicite de représentation de la solution sous l'hypothèse que le flux est uniformément convexe (i.e. $f'' \geq \theta > 0$). La formule est valable dans le cas plus général où le flux est strictement convexe. C'est le cas envisagé ci-dessous.

Théorème 2. *Soit $u(x, t)$ une solution régulière de*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}(f(u(x, t))) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times]0; +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases},$$

où le flux f est une fonction régulière telle que $f''(x) \geq 0$ sur \mathbb{R} et telle que l'ensemble $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid f''(x) = 0\}$ est de mesure nulle. On suppose que la donnée initiale u_0 est dans L^∞ et à support compact. On note b la fonction réciproque de la fonction $a = f'$. Alors :

$$u(x, t) = b\left(\frac{x - y}{t}\right),$$

où $y = y(x, t)$ minimise

$$U_0(y) + t\psi\left(\frac{x - y}{t}\right).$$

Ici, U_0 et ψ sont données par :

$$U_0(y) = \int_{-\infty}^y u_0(z, t) dz \quad \text{et} \quad \psi'(u) = b(u), \quad \psi(a(0)) = 0.$$

Remarque 6. Au vu de l'équation (1.1), le flux f est défini à une constante près. Dans la démonstration ci-dessous et dans la suite du mémoire, on peut donc supposer que $f(0) = 0$.

Démonstration du théorème 2 : d'après le lemme 1 et les hypothèses faites sur f , f' est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc f est strictement convexe. En particulier, pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité :

$$f(u) \geq f(v) + a(v)(u - v), \quad (3.1)$$

où $a(v) = f'(v)$.

Soit $u(x, t)$ une solution régulière de (1.1). Sachant que u_0 est nulle au voisinage de $-\infty$, il en est de même pour $u(x, t)$, pour toute valeur de t pour laquelle $u(x, t)$ est définie. On pose alors :

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^x u(z, t) dz.$$

En particulier :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u.$$

En intégrant sur l'intervalle $] -\infty ; x]$ l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(u)) = 0$$

sachant que $f(0) = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + f\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0.$$

On applique alors l'inégalité (3.1) avec $u = \frac{\partial U}{\partial x}$:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = f(u) \geq f(v) + a(v)(u - v),$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a(v)\frac{\partial U}{\partial x} \leq \varphi(v), \quad (3.2)$$

avec

$$\varphi(v) = a(v)v - f(v). \quad (3.3)$$

On note y l'abscisse du point d'intersection de la caractéristique de pente $a(v)$ passant par (x, t) avec l'axe des abscisses :

$$\frac{x - y}{t} = a(v),$$

soit :

$$b\left(\frac{x-y}{t}\right) = v. \quad (3.4)$$

La fonction b est bien définie, puisque $a = f'$ est strictement croissante et par définition, b est la fonction réciproque de la fonction a . De plus, b est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$ et sur cet ensemble, on a l'égalité :

$$a'(b(s))b'(s) = 1. \quad (3.5)$$

On intègre l'inégalité (3.2) sur l'intervalle $[0; t]$ suivant la caractéristique :

$$U(x, t) \leq U(y, 0) + t\varphi(v). \quad (3.6)$$

D'après l'égalité (3.4), on a :

$$\varphi(v) = \varphi\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right). \quad (3.7)$$

On note $\psi(s) = \varphi(b(s))$. On va montrer que ψ est dérivable sur \mathbb{R} et que $\psi' = b$. D'après l'égalité (3.3) et sachant que $f' = a$, on a :

$$\varphi'(v) = a'(v)v.$$

Pour $s \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$, on a, en notant $v = b(s)$:

$$\psi'(s) = \varphi'(b(s))b'(s) = a'(v)b'(s)v,$$

d'où en utilisant l'égalité (3.5) :

$$\psi'(s) = v = b(s).$$

Pour $\tilde{s} \in \mathcal{D}$, on va démontrer que cette égalité est encore vraie. Comme la fonction f est de classe C^1 , on peut écrire :

$$f(v) = f(\tilde{v}) + \int_{\tilde{v}}^v a(r)dr.$$

Pour $v = b(s)$ et $\tilde{v} = b(\tilde{s})$, on obtient :

$$f(b(s)) = f(b(\tilde{s})) + \int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} a(r)dr.$$

Sachant que $\varphi(v) = a(v)v - f(v)$ et $\psi(s) = \varphi(b(s))$, on a :

$$\psi(s) = a(b(s))b(s) - f(b(s)) = s b(s) - f(b(\tilde{s})) - \int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} a(r)dr.$$

De plus :

$$sb(s) = \tilde{s}b(\tilde{s}) - \tilde{s}b(\tilde{s}) + \tilde{s}b(s) - \tilde{s}b(s) + sb(s) = \tilde{s}b(\tilde{s}) + (s - \tilde{s})b(s) + \int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} \tilde{s}dr.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \tilde{s}b(\tilde{s}) + (s - \tilde{s})b(s) + \int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} a(b(\tilde{s}))dr - f(b(\tilde{s})) - \int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} a(r)dr \\ &= \psi(\tilde{s}) + (s - \tilde{s})b(s) - \int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} (a(r) - a(b(\tilde{s})))dr. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Par ailleurs, on sait que les fonctions a et b sont toutes les deux croissantes sur \mathbb{R} , ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} (a(r) - a(b(\tilde{s})))dr \\ &\leq \int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} (a(b(s)) - a(b(\tilde{s})))dr = \int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} (s - \tilde{s})dr = (s - \tilde{s})(b(s) - b(\tilde{s})). \end{aligned}$$

Comme b est continue sur \mathbb{R} , on a donc :

$$\int_{b(\tilde{s})}^{b(s)} (a(r) - a(b(\tilde{s})))dr = o(s - \tilde{s}). \quad (3.9)$$

Finalement, on déduit de (3.8) et (3.9) que ψ est dérivable en \tilde{s} et que $\psi'(\tilde{s}) = b(\tilde{s})$.

En particulier, ψ est strictement convexe, puisque b est strictement croissante.

La fonction ψ est donc une primitive de la fonction b . De plus, comme $f(0) = 0$, on déduit de (3.3) que $\varphi(0) = 0$. Ainsi :

$$\psi(a(0)) = \varphi(b(a(0))) = \varphi(0) = 0.$$

D'après (3.6) et (3.7), on a :

$$U(x, t) \leq U(y, 0) + t\psi\left(\frac{x - y}{t}\right). \quad (3.10)$$

Comme l'inégalité (3.2) est valable pour tout réel v , l'inégalité (3.10) est valable pour tout réel y . Sachant que pour $v = u(x, t)$ il y a égalité dans (3.2) le long de la caractéristique issue de (x, t) , on en déduit que pour tout couple (x, t) , il existe une valeur y pour laquelle il y a égalité dans (3.10).

3.2 Étude dans le cas des solutions non régulières

3.2.1 Dégénérescence du flux

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de dégénérescence du flux figurant dans l'article à paraître [2].

Dorénavant, jusqu'à la fin du paragraphe 3.2.5, on suppose que le flux f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle compact K de \mathbb{R} et qu'il existe un réel $q > 0$ tel que :

$$\inf_{(u,v) \in (K \times K) \setminus \mathcal{D}} \frac{|a(u) - a(v)|}{|u - v|^q} > 0, \quad (3.11)$$

où a désigne la dérivée (continue) de f et \mathcal{D} la diagonale de $K \times K$.

On note p le plus petit réel $q > 0$ vérifiant la condition (3.11) : p est appelé la dégénérescence de f sur K .

Remarque 7. Le réel $p = \inf \left\{ q > 0 \mid \inf_{(u,v) \in (K \times K) \setminus \mathcal{D}} \frac{|a(u) - a(v)|}{|u - v|^q} > 0 \right\}$ n'est pas nécessairement un minimum.

Lemme 2. *Si f est de classe C^2 sur K , alors la dégénérescence p de f sur K vérifie : $p \geq 1$.*

Démonstration du lemme 2 : soit $q > 0$ vérifiant la condition (3.11) ; si $m = m(q) > 0$ désigne la borne inférieure dans la formule (3.11), on peut écrire, pour tous réels u et v , $|a(u) - a(v)| \geq m |u - v|^q$. De plus, comme f est de classe C^2 sur le compact K , f'' est bornée sur K . Soit $C > 0$ tel que $|f''| \leq C$ sur K . On a :

$$|a(u) - a(v)| = \left| \int_v^u a'(s) ds \right| = \left| \int_v^u f''(s) ds \right| \leq C |u - v|.$$

Ainsi, pour $u \neq v$:

$$|u - v|^{q-1} \leq \frac{C}{m}.$$

On en déduit que $q \geq 1$ (sinon, en faisant tendre u vers v , on obtient une contradiction). Ceci étant vrai pour tout réel $q > 0$ vérifiant la condition (3.11), on en déduit que $p \geq 1$.

Remarque 8. On suppose que u_0 est dans L^∞ et à support compact. Soit $M > 0$ tel que u_0 vérifie $|u_0| \leq M$. On suppose que f vérifie la condition (3.11) sur l'intervalle compact $K = [-M, M]$. D'après le théorème d'unicité de Kruzkov, on sait que si \tilde{f} est un autre flux coïncidant avec f sur K , alors la solution entropique du problème (1.1) pour le couple (f, u_0) est égale à la solution entropique du problème (1.1) pour le couple (\tilde{f}, u_0) . Ainsi, sans perte de généralité, on va supposer dans la suite, à l'exception du paragraphe 3.2.4, que f vérifie la condition (3.11) sur \mathbb{R} : il existe $q > 0$ tel que :

$$\inf_{(u,v) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{D}} \frac{|a(u) - a(v)|}{|u - v|^q} > 0, \quad (3.12)$$

où \mathcal{D} désigne cette fois la diagonale de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Il est en effet possible de prolonger la fonction f sur \mathbb{R} en conservant la condition (3.11).

Enfin, on suppose également qu'il existe $\beta > 0$ tel que au voisinage de $\pm\infty$,

$$f(u) = O(|u|^\beta). \quad (3.13)$$

Lemme 3. *La condition (3.12) implique que a est un homéomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .*

Démonstration du lemme 3 : si $m = m(q) > 0$ désigne la borne inférieure dans l'inégalité (3.12), on a : pour tous réels u et v , $|a(u) - a(v)| \geq m |u - v|^q$. En particulier, cette inégalité prouve que a est injective. De plus, en prenant $v = 0$, on voit que $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} |a(u)| = +\infty$. Comme a est continue, on en déduit que a est un homéomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Remarque 9. Quitte à changer $f(u)$ en $-f(-u)$, on va également supposer dans la suite que la fonction a est strictement croissante, et donc que la fonction f est strictement convexe. Ainsi, la fonction réciproque b de a est aussi un homéomorphisme strictement croissant de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et la fonction ψ définie dans le théorème 2 est strictement convexe.

3.2.2 Étude du minimiseur $y(x, t)$

Lemme 4. *On suppose que u_0 est dans L^∞ et à support compact. On reprend les notations du théorème 2.*

1) *Pour tout couple (x, t) , il existe au moins un réel $y = y(x, t)$ qui minimise*

$$h_{(x,t)}(y) = U_0(y) + t\psi\left(\frac{x-y}{t}\right).$$

2) *Soit $t > 0$. Si pour tout réel x , $y_t(x)$ désigne un minimiseur associé au couple (x, t) , alors pour tous réels x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2$, $y_t(x_1) \leq y_t(x_2)$ (par abus de langage, la fonction $x \mapsto y_t(x)$ est croissante).*

Démonstration du lemme 4 :

1) Comme u_0 est à support compact, U_0 est continue et bornée. De plus, ψ est une fonction (strictement) convexe, qui atteint son minimum en $s = a(0)$, puisque $\psi'(a(0)) = b(a(0)) = 0$. On en déduit que $h_{(x,t)}$ atteint son minimum.

2) Soient $t > 0$. Soient x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$. On note $y_1 = y_t(x_1)$. On va prouver que pour tout réel $y < y_1$:

$$U_0(y_1) + t\psi\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) < U_0(y) + t\psi\left(\frac{x_2 - y}{t}\right).$$

Soit $y < y_1$. On pose :

$$\lambda = \frac{y_1 - y}{x_2 - x_1 + y_1 - y} \in]0; 1[.$$

On a alors : $x_2 - y_1 = \lambda(x_1 - y_1) + (1 - \lambda)(x_2 - y)$ et $x_1 - y = \lambda(x_2 - y) + (1 - \lambda)(x_1 - y_1)$. Sachant que ψ est strictement convexe et que $x_1 - y_1 \neq x_2 - y$ (puisque $x_1 < x_2$ et $y < y_1$), on a les inégalités :

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) &< \lambda\psi\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + (1 - \lambda)\psi\left(\frac{x_2 - y}{t}\right) \\ \psi\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) &< \lambda\psi\left(\frac{x_2 - y}{t}\right) + (1 - \lambda)\psi\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\psi\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + \psi\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) < \psi\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + \psi\left(\frac{x_2 - y}{t}\right). \quad (3.14)$$

On multiplie l'inégalité (3.14) par t et on ajoute $U_0(y_1) + U_0(y)$ aux deux membres :

$$U_0(y_1) + t\psi\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + U_0(y) + t\psi\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) < U_0(y_1) + t\psi\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + U_0(y) + t\psi\left(\frac{x_2 - y}{t}\right).$$

Or, d'après la définition de y_1 , on a :

$$U_0(y_1) + t\psi\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) < U_0(y) + t\psi\left(\frac{x_1 - y}{t}\right).$$

On en déduit :

$$U_0(y_1) + t\psi\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) < U_0(y) + t\psi\left(\frac{x_2 - y}{t}\right).$$

Cette inégalité prouve donc que $y_1 \leq y_2$, puisqu'aucun réel $y < y_1$ ne minimise :

$$U_0(y) + t\psi\left(\frac{x_2 - y}{t}\right).$$

Lemme 5. *Une fonction monotone sur \mathbb{R} est continue, sauf éventuellement sur un ensemble au plus dénombrable de points.*

Démonstration du lemme 5 : on traite le cas où la fonction est croissante (le cas où la fonction est décroissante se traite de manière analogue). Soit f une fonction croissante sur \mathbb{R} : f admet une limite à droite et à gauche en tout point. Soit x un point de discontinuité de f . On note $f(x^+)$ (respectivement $f(x^-)$) la limite à droite (respectivement gauche) de f en x . On a : $f(x^-) < f(x^+)$. L'intervalle $]f(x^-); f(x^+[$ contient au moins un rationnel. On note $r(x)$ un rationnel de cet intervalle. On va montrer que l'application r ainsi définie est injective : soient x, y deux réels tels que $r(x) = r(y)$, avec $x \leq y$. Si $y > x$, alors pour tout réel $z \in]x; y[$, $f(z) \geq f(x^+)$ et donc $f(y^-) \geq f(x^+)$. Or $r(x) < f(x^+)$ et $f(y^-) < r(y)$, ce qui contredit l'égalité $r(x) = r(y)$. On en déduit que r est injective à valeurs dans \mathbb{Q} , ce qui prouve que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Proposition 2. *On suppose que u_0 est dans L^∞ et à support compact. Soit $t > 0$. Pour tout réel x , sauf éventuellement un nombre dénombrable, il existe un unique réel $y = y(x, t)$ qui minimise $h_{(x,t)}(y)$.*

Démonstration de la proposition 2 : soit $t > 0$. On pose :

$$y_t^-(x) := \inf \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \text{ minimise } U_0(y) + t \psi \left(\frac{x-y}{t} \right) \right\},$$

$$y_t^+(x) := \sup \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \text{ minimise } U_0(y) + t \psi \left(\frac{x-y}{t} \right) \right\}.$$

Par continuité de U_0 et de ψ , $y_t^-(x)$ et $y_t^+(x)$ sont bien des minimiseurs. Soit x un point de continuité de y_t^- . On va montrer que $y_t^-(x) = y_t^+(x)$. Par l'absurde, on suppose que $y_t^-(x) < y_t^+(x)$. D'après le lemme 4, si $x' > x$, on a $y_t^+(x) \leq y_t^-(x')$. En faisant alors tendre x' vers x , on obtient $y_t^+(x) \leq y_t^-(x)$, ce qui est contradictoire. Ainsi, en un point de continuité de y_t^- , il y a unicité du minimiseur. Comme, d'après le lemme 4, la fonction $x \mapsto y_t^-(x)$ est croissante, on en déduit, d'après le lemme 5, qu'elle est continue, sauf éventuellement sur un ensemble au plus dénombrable de points. Ainsi, pour tout réel x , sauf éventuellement un nombre dénombrable, il existe un unique réel $y = y(x, t)$ qui minimise $h_{(x,t)}(y)$.

Lemme 6. *On a :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |y(x, t) - x| \right) = 0.$$

Démonstration du lemme 6 : soit $\varepsilon > 0$. Comme u_0 est à support compact, U_0 est bornée : soit $M > 0$ tel que pour tout réel y , $|U_0(y)| \leq M$. Soit $C > 0$ tel que

$$\frac{2M}{C} \leq \varepsilon.$$

Comme $\psi(a(0)) = 0$, on a pour tout couple $(x, t) : h_{(x,t)}(y(x, t)) \leq U_0(x - t a(0)) \leq M$. On sait que b est un homéomorphisme strictement croissant de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et que ψ est une primitive de b . On en déduit, d'après la propriété de la moyenne de Césaro, que :

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\psi(u)}{|u|} = +\infty.$$

Ainsi, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel u , $|u| \geq A \Rightarrow \psi(u) \geq C|u|$. On considère un réel $t_0 > 0$ tel que $t_0 A \leq \varepsilon$. Pour $t \leq t_0$, on a pour tout réel $x : |x - y(x, t)| \leq \varepsilon$. En effet, si $|x - y(x, t)| \leq tA$, alors $|x - y(x, t)| \leq t_0 A \leq \varepsilon$ et si $|x - y(x, t)| > tA$, alors :

$$\left| \frac{x - y(x, t)}{t} \right| > A,$$

d'où :

$$\psi \left(\frac{x - y(x, t)}{t} \right) \geq C \left| \frac{x - y(x, t)}{t} \right|,$$

et donc :

$$M \geq h_{(x,t)}(y(x,t)) \geq -M + C|x - y(x,t)|,$$

soit finalement :

$$|x - y(x,t)| \leq \frac{2M}{C} \leq \varepsilon.$$

3.2.3 Formule de Lax et solution faible

Théorème 3. *On suppose que u_0 est dans L^∞ et à support compact. Pour tout couple (x,t) où il y a unicité du minimiseur $y(x,t)$, on pose*

$$u(x,t) = b\left(\frac{x - y(x,t)}{t}\right). \quad (3.15)$$

La fonction u est bien définie presque partout et u est une solution faible du problème (1.1) sur $]0; +\infty[$.

Pour la démonstration du théorème, on va utiliser le lemme suivant, associé à la méthode de Laplace pour les intégrales à paramètres :

Lemme 7. *Soient h une fonction continue sur \mathbb{R} telle que*

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{h(y)}{|y|} = +\infty \quad (3.16)$$

et p une fonction continue sur \mathbb{R} telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |p(y)| e^{-h(y)} dy < +\infty. \quad (3.17)$$

S'il existe un réel y_0 tel que pour tout réel y , $h(y) > h(y_0)$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} p(y) e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} = p(y_0). \quad (3.18)$$

Démonstration du lemme 7 : soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'hypothèse (3.16), l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy$$

est convergente et d'après les hypothèses (3.16) et (3.17), l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} p(y) e^{-nh(y)} dy$$

est également convergente.

On peut supposer que $y_0 = 0$. En effet, si le résultat est connu pour $y_0 = 0$, alors, en posant $\tilde{h}(y) = h(y + y_0)$ et $\tilde{p}(y) = p(y + y_0)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} p(y) e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} \tilde{p}(y) e^{-n\tilde{h}(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-n\tilde{h}(y)} dy} = \tilde{p}(0) = p(y_0).$$

De plus,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} p(y) e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} - p(y_0) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (p(y) - p(y_0)) e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy},$$

donc on peut supposer que $p(0) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme p est continue en 0, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout réel y , $|y| \leq \eta \Rightarrow |p(y)| \leq \varepsilon$. Sur le compact $[0; 1]$, la fonction continue h est bornée : il existe $C > 0$ tel que pour tout réel $y \in [0; 1]$, $|h(y)| \leq C$. D'après l'hypothèse (3.16), il existe $A > 0$ (on peut supposer que $A > \eta$) tel que pour tout réel y , $|y| \geq A \Rightarrow h(y) \geq 2C$. On pose $K = [-A; A] \setminus]-\eta; \eta[$. Sur le compact K , la fonction continue h atteint son minimum $m > h(0)$. On pose :

$$\delta = \frac{m - h(0)}{2} > 0.$$

En particulier, on a l'égalité (utilisée plus bas) : $m - h(0) - \delta = \delta$.

De plus, sur le compact $[-A; A]$, la fonction continue p est bornée : il existe $C' > 0$ tel que pour tout réel y , $|y| \leq A \Rightarrow |p(y)| \leq C'$. Comme h est continue en 0, il existe $\nu > 0$ (on peut supposer que $\nu < \eta$) tel que pour tout réel y , $|y| \leq \nu \Rightarrow |h(y) - h(0)| \leq \delta$.

En utilisant la relation de Chasles, on va découper l'intégrale à étudier en trois intégrales $I_1(n)$, $I_2(n)$, $I_3(n)$ et on va étudier séparément chacune de ces intégrales.

On écrit donc :

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} p(y) e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} = \underbrace{\frac{\int_{|y| \leq \eta} p(y) e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy}}_{I_1(n)} + \underbrace{\frac{\int_{y \in K} p(y) e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy}}_{I_2(n)} + \underbrace{\frac{\int_{|y| \geq A} p(y) e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy}}_{I_3(n)}.$$

On a :

$$|I_1(n)| \leq \frac{\int_{|y| \leq \eta} |p(y)| e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} \leq \frac{\int_{|y| \leq \eta} \varepsilon e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} \leq \varepsilon \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} = \varepsilon.$$

Ensuite :

$$|I_2(n)| \leq \frac{\int_{y \in K} |p(y)| e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} \leq \frac{\int_{y \in K} C' e^{-nm} dy}{\int_{|y| \leq \nu} e^{-n(h(0)+\delta)} dy} \leq \frac{2AC' e^{-nm}}{2\nu e^{-n(h(0)+\delta)}} = \frac{AC'}{\nu} e^{-n\delta},$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_2(n) = 0.$$

Enfin :

$$|I_3(n)| \leq \frac{\int_{|y| \geq A} |p(y)| e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} \leq \frac{\int_{|y| \geq A} |p(y)| e^{-nh(y)} dy}{\int_{y \in [0; 1]} e^{-nC} dy} = \int_{|y| \geq A} |p(y)| e^{-n(h(y)-C)} dy.$$

On pose $s_n(y) = |p(y)| e^{-n(h(y)-C)}$. Pour $|y| \geq A$, $h(y) \geq 2C$, d'où $h(y) - C \geq C > 0$. On en déduit que pour $|y| \geq A$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(y) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq s_n(y) \leq |p(y)| e^{-(h(y)-C)} = s(y).$$

Or, d'après l'hypothèse (3.17), la fonction s est intégrable. On déduit alors du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|y| \geq A} |p(y)| e^{-n(h(y)-C)} dy = 0,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_3(n) = 0.$$

On en déduit finalement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} p(y) e^{-nh(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh(y)} dy} = 0.$$

Démonstration du théorème 3 : le fait que la formule (3.15) définisse une fonction u presque partout résulte de la proposition 2 et du lemme 3. Il s'agit maintenant de prouver que u est une solution faible de (1.1) sur $]0; +\infty[$. On va procéder en plusieurs étapes.

1) On pose, pour tout couple (x, t) :

$$h_{(x,t)}(y) = U_0(y) + t \psi \left(\frac{x-y}{t} \right) \quad \text{et} \quad p_{(x,t)}(y) = b \left(\frac{x-y}{t} \right),$$

et pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n(x, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} p_{(x,t)}(y) e^{-n h_{(x,t)}(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-n h_{(x,t)}(y)} dy},$$

et :

$$f_n(x, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(p_{(x,t)}(y)) e^{-n h_{(x,t)}(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-n h_{(x,t)}(y)} dy}.$$

On va prouver la convergence simple de $(u_n(x, t))_n$ (respectivement $(f_n(x, t))_n$) vers $u(x, t)$ (respectivement $f(u(x, t))$), pour tout $t > 0$ et pour presque tout x .

Compte tenu des définitions de U_0 et ψ et de la continuité de b sur \mathbb{R} , les fonctions $h_{(x,t)}$ et $p_{(x,t)}$ sont continues sur \mathbb{R} .

Comme u_0 est à support compact, U_0 est bornée. De plus, on sait d'après la démonstration du lemme 6 que :

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\psi(u)}{|u|} = +\infty.$$

Ainsi :

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{h_{(x,t)}(y)}{|y|} = +\infty. \quad (3.19)$$

En reprenant les notations de la démonstration du lemme 3, on a : pour tous réels u et v ,

$$|a(u) - a(v)| \geq m |u - v|^q,$$

d'où :

$$|b(u) - b(v)| \leq k |u - v|^{\frac{1}{q}}, \text{ avec } k = m^{-\frac{1}{q}},$$

puisque b est la fonction réciproque de a . La fonction b est donc höldérienne de rapport $\frac{1}{q}$ sur \mathbb{R} . En particulier, au vu de la limite (3.19), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |p_{(x,t)}(y)| e^{-h_{(x,t)}(y)} dy < +\infty.$$

Enfin, si $t > 0$, on a pour presque tout x l'inégalité : pour tout réel y , $h_{(x,t)}(y) > h_{(x,t)}(y(x, t))$.

Les hypothèses du lemme 7 étant réunies, on déduit de la formule (3.18) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x, t) = p_{(x,t)}(y(x, t)),$$

soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x, t) = b \left(\frac{x - y(x, t)}{t} \right) = u(x, t). \quad (3.20)$$

De manière analogue, on pose pour tout entier naturel non nul n :

$$f_n(x, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(p_{(x,t)}(y)) e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy}.$$

Sachant que f est continue et compte tenu de l'hypothèse (3.13), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(p_{(x,t)}(y))| e^{-h_{(x,t)}(y)} dy < +\infty.$$

On en déduit comme précédemment que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, t) = f(u(x, t)). \quad (3.21)$$

2) On va borner $u_n(x, t)$ et $f_n(x, t)$ indépendamment de n et x (et aussi de t pour $u_n(x, t)$).

Pour $u_n(x, t)$, sachant que pour presque tout réel y :

$$\frac{\partial}{\partial y}(h_{(x,t)}(y)) = u_0(y) - b \left(\frac{x - y}{t} \right) = u_0(y) - p_{(x,t)}(y),$$

on a :

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \frac{\int_{\mathbb{R}} p_{(x,t)}(y) e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}} \left(u_0(y) - \frac{\partial}{\partial y}(h_{(x,t)}(y)) \right) e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy}, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant liée au fait que $h_{(x,t)}$ a pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$. On en déduit :

$$|u_n(x, t)| \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} |u_0(y)| e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy} \leq \|u_0\|_{\infty}.$$

Pour $f_n(x, t)$, la borne est plus difficile à obtenir. On se donne deux réels t_0 et t_1 tels que $0 < t_0 \leq t_1$. On va déterminer une constante $M_{0,1} = M(t_0, t_1)$ indépendante de x et n telle que, pour tout réel $t \in [t_0; t_1]$:

$$|f_n(x, t)| \leq M_{0,1}.$$

Compte tenu de l'hypothèse (3.13) sur f , il suffit de trouver une constante $C_{0,1} = C(t_0, t_1)$ indépendante de x et n telle que, pour tout réel $t \in [t_0; t_1]$:

$$I_n(x, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \left| b\left(\frac{x-y}{t}\right) \right| e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy} \leq C_{0,1}.$$

En effectuant le changement de variable

$$z = \frac{x-y}{t},$$

on obtient :

$$I_n(x, t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} |b(z)| e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz},$$

avec :

$$h_{(x,t)}(x-tz) = U_0(x-tz) + t\psi(z).$$

Sachant que :

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\psi(u)}{|u|} = +\infty,$$

on considère $A > 0$ (on peut supposer $A > 1$) tel que pour tout réel z , $|z| \geq A \Rightarrow \psi(z) \geq C|z|$, où C sera défini ultérieurement (indépendamment de A). On peut écrire :

$$I_n(x, t) = \underbrace{\frac{\int_{|z| \leq A} |b(z)| e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz}}_{J_n(x, t)} + \underbrace{\frac{\int_{|z| \geq A} |b(z)| e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz}}_{K_n(x, t)}.$$

Sur le compact $[-A; A]$, la fonction continue b est bornée : il existe $C' > 0$ tel que pour tout réel z , $|z| \leq A \Rightarrow |b(z)| \leq C'$. On a alors :

$$0 \leq J_n(x, t) \leq C'.$$

Il faut maintenant borner l'intégrale $K_n(x, t)$. Comme la fonction ψ est strictement convexe et que $\psi'(a(0)) = \psi(a(0)) = 0$, on en déduit qu'elle atteint son minimum (égal à 0) en $a(0)$, donc ψ est positive sur \mathbb{R} . On note $d > 0$ le maximum de ψ sur $[0; 1]$ et $d' > 0$ un réel tel que $|U_0| \leq d'$ sur \mathbb{R} (U_0 étant bornée sur \mathbb{R}). On peut minorer le dénominateur de $K_n(x, t)$ de la manière suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz \geq \int_0^1 e^{-n(d'+t_1 d)} dz \geq \rho^{-n}, \text{ avec } \rho = e^{(d'+t_1 d)} > 0.$$

On va maintenant majorer le numérateur de $K_n(x, t)$:

$$\begin{aligned} \int_{|z| \geq A} |b(z)| e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz &\leq \int_{|z| \geq A} |b(z)| e^{-n(-d'+t_0 C|z|)} dz \\ &= \int_{|z| \geq A} |b(z)| e^{-(n-1)(-d'+t_0 C A)} e^{-(d'+t_0 C|z|)} dz \\ &\leq \lambda^{-(n-1)} I, \end{aligned}$$

où on a noté :

$$0 < I := \int_{\mathbb{R}} |b(z)| e^{-(-d'+t_0 C|z|)} dz < +\infty \text{ et } \lambda = e^{(-d'+t_0 C A)} > 0.$$

On en déduit que :

$$0 \leq K_n(x, t) \leq \lambda I \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^n.$$

On choisit donc C tel que :

$$C \geq \frac{2d' + t_1 d}{t_0} > 0.$$

On a alors :

$$-d' + t_0 C A \geq -d' + t_0 C \geq d' + t_1 d,$$

ce qui prouve que $\rho \leq \lambda$, et donc que $0 \leq K_n(x, t) \leq \lambda I$, d'où la borne sur l'intégrale $K_n(x, t)$.

On a donc bien réussi à borner $f_n(x, t)$ indépendamment de n et x .

3) On va démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n(x, t) = -\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} (v_n(x, t)) \tag{3.22}$$

et

$$f_n(x, t) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial t} (v_n(x, t)), \tag{3.23}$$

où $v_n = \ln(w_n)$, avec :

$$w_n(x, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-n h_{(x,t)}(y)} dy.$$

En effectuant le changement de variable

$$z = \frac{x - y}{t},$$

on obtient :

$$w_n(x, t) = \int_{\mathbb{R}} t e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz,$$

avec :

$$h_{(x,t)}(x - tz) = U_0(x - tz) + t \psi(z).$$

Soit $t > 0$. On commence par montrer que :

$$\frac{\partial w_n}{\partial x} = -n w_n u_n.$$

On a pour tout réel x :

$$\frac{\partial}{\partial x} (h_{(x,t)}(x - tz)) = u_0(x - tz).$$

De plus, comme u_0 et U_0 sont bornées sur \mathbb{R} , dans un intervalle compact I de \mathbb{R} , on peut dominer la fonction :

$$z \mapsto u_0(x - tz) e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)}$$

indépendamment de $x \in I$ par une fonction intégrable (en z). En appliquant le théorème de Lebesgue de dérivation sous le signe intégral, on obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} w_n = \int_{\mathbb{R}} -n t u_0(x - tz) e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz.$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} u_0(x - tz) e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz = \int_{\mathbb{R}} b(z) e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (u_0(x - tz) - b(z)) e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n t} \frac{\partial}{\partial z} (e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)}) dz \\ &= \frac{1}{n t} [e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)}]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque U_0 est bornée et que

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\psi(u)}{|u|} = +\infty.$$

On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x} w_n = -n \int_{\mathbb{R}} t b(z) e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz = -n \int_{\mathbb{R}} b\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nh_{(x,t)}(y)} dy = -n w_n u_n.$$

On en déduit alors la relation (3.22).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par montrer que :

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = n w_n f_n.$$

On a pour tout réel t :

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_{(x,t)}(x-tz)) = -z u_0(x-tz) + \psi(z).$$

De plus, comme u_0 et U_0 sont bornées sur \mathbb{R} , dans un intervalle compact J de $]0; +\infty[$, on peut dominer la fonction :

$$z \mapsto (1 - nt(-z u_0(x-tz) + \psi(z))) e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)}$$

indépendamment de $t \in J$ par une fonction intégrable (en z). En appliquant le théorème de Lebesgue de dérivation sous le signe intégral, on obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} w_n = \int_{\mathbb{R}} (1 - nt(-z u_0(x-tz) + \psi(z))) e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz.$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + ntz u_0(x-tz)) e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz = \int_{\mathbb{R}} ntz b(z) e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (1 + ntz u_0(x-tz) - ntz b(z)) e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)} dz &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial z} (z e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)}) dz \\ &= [z e^{-nh_{(x,t)}(x-tz)}]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} w_n = n t \int_{\mathbb{R}} (z b(z) - \psi(z)) e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz. \quad (3.24)$$

Or, on a la relation :

$$s b(s) - \psi(s) = f(b(s)). \quad (3.25)$$

En effet, la dérivée du membre de gauche est : $b(s) + s b'(s) - b(s) = s b'(s)$, la dérivée du membre de droite est : $f'(b(s)) b'(s) = a(b(s)) b'(s) = s b'(s)$ et les deux membres prennent la même valeur 0 en $s = a(0)$. On déduit alors de (3.24) et (3.25) que :

$$\frac{\partial}{\partial t} w_n = n t \int_{\mathbb{R}} f(b(z)) e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz = n \int_{\mathbb{R}} f\left(b\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) e^{-n h_{(x,t)}(y)} dy = n w_n f_n.$$

On en déduit alors (3.23).

4) On déduit des égalités (3.22) et (3.23) et du lemme de Schwarz (pour les distributions) qu'on a l'égalité

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial f_n}{\partial x} = 0$$

au sens des distributions.

5) En faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant les limites (3.20) et (3.21) ainsi que les bornes de u_n et f_n obtenues au point 2), on en déduit, d'après le théorème de convergence dominée, que l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

est vérifiée au sens des distributions. En d'autres termes, u est une solution faible du problème (1.1) sur $]0; +\infty[$.

3.2.4 Effet régularisant

3.2.4.1 Espaces BV^s

Dans l'article à paraître [2], il est mis en évidence l'intérêt de certains espaces fonctionnels dans le cadre des lois de conservation scalaires : les espaces BV^s . On va ici donner un certain nombre de définitions et de résultats sans démonstration. Pour une étude plus détaillée et approfondie, on se reportera à [2].

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des subdivisions de I . Pour $s \in [0; 1]$, l'espace $BV^s(I)$ apparaît comme une généralisation de l'espace $BV(I)$ des fonctions à variations bornées sur I .

Définition 5. Soit $s \in [0; 1]$.

i) Soit $\sigma \in \mathcal{S}(I)$: il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset I$, avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Si u est une fonction réelle définie sur I , la s -variation totale de u sur σ est :

$$TV^s u\{\sigma\} = \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})|^{\frac{1}{s}}.$$

ii) Si u est une fonction réelle définie sur I , la s -variation totale de u sur I est :

$$TV^s u\{I\} = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}(I)} TV^s u\{\sigma\}.$$

iii) L'espace $BV^s(I)$ est l'ensemble des fonctions réelles u définies sur I et pour lesquelles $TV^s u\{I\} < +\infty$. Dans ce cas, on pose alors :

$$|u|_{BV^s(I)} = (TV^s u\{I\})^s.$$

Remarque 10. Pour $s = 1$, on retrouve l'espace des fonctions à variations bornées sur I : $BV^1(I) = BV(I)$.

Proposition 3. i) Pour tout réel $s \in]0; 1]$, $BV^s(I) \subset L^\infty(I)$.

ii) Si $0 < s < t \leq 1$, on a : $BV^t(I) \subsetneq BV^s(I)$.

Remarque 11. Le point ii) signifie que la suite $(BV^s(I))_{0 < s \leq 1}$ est décroissante pour l'inclusion. En particulier, on va chercher dans la suite à trouver "le s optimal", c'est-à-dire le plus grand possible.

Proposition 4. Si $u \in BV^s(I)$, alors u est une fonction réglée, c'est-à-dire que u admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de I .

3.2.4.2 Effet régularisant donné par la formule de Lax

Dans [2], le théorème ci-dessous est démontré :

Théorème 4. Soient $M > 0$ et K l'intervalle $[-M; M]$. Si $u_0 \in L^\infty$ vérifie $|u_0| \leq M$, alors la fonction u définie par (3.15) vérifie : pour tout $t > 0$, $u(\cdot, t)$ est dans l'espace $BV_{loc}^s(\mathbb{R})$, pour tout $s < \frac{1}{p} \leq 1$, où p est la dégénérescence du flux f .

Remarque 12. En particulier, la fonction u admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point.

3.2.5 Condition d'entropie de Lax, solution entropique

Proposition 5. *La fonction u définie par (3.15) vérifie la condition d'entropie de Lax (1.5).*

Démonstration de la proposition 5 : soit $t > 0$; soient x_1, x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$ et y_1 (respectivement y_2) un minimiseur associé au couple (x_1, t) (respectivement (x_2, t)). D'après le lemme 4, on a $y_1 \leq y_2$. D'après la formule (3.15), on a :

$$u(x_1, t) = b\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) \quad \text{et} \quad u(x_2, t) = b\left(\frac{x_2 - y_2}{t}\right).$$

Comme la fonction b est croissante, on a :

$$b\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) \geq b\left(\frac{x_1 - y_2}{t}\right).$$

Ainsi, on a l'inégalité :

$$u(x_2, t) - u(x_1, t) \leq b\left(\frac{x_2 - y_2}{t}\right) - b\left(\frac{x_1 - y_2}{t}\right). \quad (3.26)$$

Par ailleurs, on a vu dans le point 1) de la démonstration du théorème 3 que pour tous réels u et v :

$$|b(u) - b(v)| \leq k |u - v|^{\frac{1}{q}}, \quad \text{avec } k = m^{-\frac{1}{q}}.$$

Comme $x_2 - x_1 > 0$, on déduit alors de (3.26) que :

$$u(x_2, t) - u(x_1, t) \leq k \left(\frac{x_2 - x_1}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

D'après la remarque 12, u admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point.

On en déduit que le long d'une discontinuité, on a $u_g > u_d$. Comme a est strictement croissante, on a donc : $a(u_g) > a(u_d)$. De plus, en reprenant les notations de la formule de Rankine-Hugoniot (1.4), on a :

$$\sigma = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g},$$

et comme f est strictement convexe et que $a(u) = f'(u)$, on en déduit :

$$a(u_g) > \sigma > a(u_d).$$

Ainsi, la condition d'entropie de Lax (1.5) est bien vérifiée.

Remarque 13. Dans le livre [5], Dafermos démontre le résultat suivant : si $u_0 \in BV$ et si $u(x, t) \in BV_{loc}$ est une solution de (1.1) qui vérifie la condition d'entropie (1.5) de Lax, alors u vérifie la condition d'entropie (1.6) de Kruzkov.

Théorème 5. *On suppose que u_0 est dans L^∞ et à support compact. La fonction u définie par (3.15) est l'unique solution entropique du problème (1.1).*

Démonstration du théorème 5 : le théorème 3 associé à la proposition 5 prouvent que la fonction u définie par (3.15) est une solution entropique du problème (1.1) sur $]0; +\infty[$.

1) On va prouver que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x) \text{ au sens des distributions.}$$

On va d'abord montrer que

$$x \mapsto h_{(x,t)}(y(x, t)) = U_0(y(x, t)) + t \psi \left(\frac{x - y(x, t)}{t} \right)$$

est une primitive de $x \mapsto u(x, t)$, puis que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_{(x,t)}(y(x, t)) = U_0(x) \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

D'après la démonstration du théorème 3, la fonction

$$x \mapsto U_n(x, t) := -\frac{1}{n} \ln \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-n h_{(x,t)}(y)} dy \right) = -\ln \left(w_n(x, t)^{\frac{1}{n}} \right)$$

est une primitive de $x \mapsto u_n(x, t)$. De plus, d'après un résultat classique,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x, t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln \left(\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-n h_{(x,t)}(y)} dy \right)^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= -\ln \left(\sup_{y \in \mathbb{R}} e^{-h_{(x,t)}(y)} \right) \\ &= -\ln \left(e^{-h_{(x,t)}(y(x,t))} \right) \\ &= h_{(x,t)}(y(x, t)). \end{aligned}$$

On va maintenant borner $U_n(x, t)$ indépendamment de n et x . Pour cela, on va prouver qu'il existe deux réels $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ indépendants de n et x tels que

$$C_1 \leq w_n(x, t)^{\frac{1}{n}} \leq C_2.$$

On a vu dans la démonstration du théorème 3 que

$$w_n(x, t) = \int_{\mathbb{R}} t e^{-n h_{(x,t)}(x-tz)} dz,$$

avec :

$$h_{(x,t)}(x - tz) = U_0(x - tz) + t\psi(z).$$

On pose :

$$r = \inf_{y \in \mathbb{R}} e^{-U_0(y)} \quad \text{et} \quad R = \sup_{y \in \mathbb{R}} e^{-U_0(y)}.$$

Comme U_0 est bornée, on a $R > 0$ et $r > 0$. On a les inégalités :

$$t r^n \int_{\mathbb{R}} e^{-nt\psi(z)} dz \leq w_n(x, t) \quad (3.27)$$

et

$$w_n(x, t) \leq t R^n \int_{\mathbb{R}} e^{-nt\psi(z)} dz. \quad (3.28)$$

Comme

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{\psi(z)}{|z|} = +\infty,$$

il existe un compact K tel que pour tout réel $z \in \mathbb{R} \setminus K$, $\psi(z) \geq |z|$. On pose :

$$r' = \inf_{z \in K} e^{-t\psi(z)} \quad \text{et} \quad R' = \sup_{z \in K} e^{-t\psi(z)}.$$

Comme ψ est continue sur \mathbb{R} , $r' > 0$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-nt\psi(z)} dz \geq \int_K e^{-nt\psi(z)} dz \geq r'^n |K|.$$

On déduit de (3.27) que

$$t r^n r'^n |K| \leq w_n(x, t).$$

Comme la suite $(t |K|)^{\frac{1}{n}}$ a pour limite 1, elle est minorée par une constante strictement positive. Il existe donc un réel $C_1 > 0$ indépendant de n et x tel que

$$C_1 \leq w_n(x, t)^{\frac{1}{n}}.$$

On a :

$$t \int_{\mathbb{R}} e^{-nt\psi(z)} dz = t \int_K e^{-nt\psi(z)} dz + t \int_{\mathbb{R} \setminus K} e^{-t|z|} dz \leq t R'^n |K| + \gamma,$$

où :

$$\gamma = \int_{\mathbb{R}} e^{-|u|} du.$$

On déduit de (3.28) que

$$w_n(x, t) \leq R^n (t R'^n |K| + \gamma).$$

Comme la suite $(t R'^n |K| + \gamma)^{\frac{1}{n}}$ a pour limite $\max(1, R')$, elle est bornée. Il existe donc un réel $C_2 > 0$ indépendant de n et x tel que

$$w_n(x, t)^{\frac{1}{n}} \leq C_2.$$

On a donc bien borné $U_n(x, t)$ indépendamment de n et x .

On déduit alors du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x, t) = h_{(x,t)}(y(x, t)) \text{ dans } L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

En particulier :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x, t) = h_{(x,t)}(y(x, t)) \text{ au sens des distributions.}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial x} (U_n(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} (h_{(x,t)}(y(x, t))) \text{ au sens des distributions,}$$

soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (h_{(x,t)}(y(x, t))) \text{ au sens des distributions.} \quad (3.29)$$

Or, on sait d'après la démonstration du théorème 3 que $|u_n(x, t)| \leq \|u_0\|_\infty$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x, t) = u(x, t),$$

ce qui permet d'écrire (comme précédemment) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x, t) = u(x, t) \text{ au sens des distributions.} \quad (3.30)$$

Par unicité de la limite dans \mathcal{D}' , on déduit de (3.29) et (3.30) que $x \mapsto h_{(x,t)}(y(x, t))$ est une primitive de $x \mapsto u(x, t)$.

En $y = y(x, t)$, on a :

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} (h_{(x,t)}(y)) = u_0(y) - b \left(\frac{x - y}{t} \right),$$

d'où :

$$\frac{x - y(x, t)}{t} = a(u_0(y(x, t))),$$

et donc :

$$h_{(x,t)}(y(x,t)) = U_0(y(x,t)) + t\psi(a(u_0(y(x,t)))). \quad (3.31)$$

Comme U_0 est continue, on déduit du lemme 6 que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} U_0(y(x,t)) = U_0(x).$$

De plus, u_0 est bornée et a et ψ sont continues, d'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0} t\psi(a(u_0(y(x,t)))) = 0.$$

On en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_{(x,t)}(y(x,t)) = U_0(x).$$

Soit J un compact de \mathbb{R} . D'après l'expression (3.31), pour $t \in]0; t_0]$, on peut borner la fonction $x \mapsto h_{(x,t)}(y(x,t))$ sur J indépendamment de t . On déduit alors du théorème de convergence dominée que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_{(x,t)}(y(x,t)) = U_0(x) \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

En particulier :

$$\lim_{t \rightarrow 0} h_{(x,t)}(y(x,t)) = U_0(x) \text{ au sens des distributions,}$$

et donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x,t) = u_0(x) \text{ au sens des distributions,}$$

puisque $x \mapsto h_{(x,t)}(y(x,t))$ est une primitive de $x \mapsto u(x,t)$ et que U_0 est une primitive de u_0 .

2) On va prouver que u satisfait la condition d'entropie de Kruzkov. D'après la remarque 13 et la proposition 5, la condition est vérifiée dans le cas où $u_0 \in BV$. Par densité, on peut étendre ce résultat pour une condition initiale $u_0 \in L^\infty$ à support compact. Pour cela, on écrit u_0 comme limite (dans L^1_{loc}) d'une suite de fonctions à variations bornées et on utilise la notion de Γ -convergence dans la minimisation de $h_{(x,t)}(y)$.

3) Les points 1) et 2) précédents permettent alors de conclure, en se référant à l'article [3]. On pourra également consulter [14, 17].

3.2.6 Optimalité de l'effet régularisant

Dans l'article [11], Lax démontre que pour un flux uniformément convexe, si la condition initiale u_0 est bornée et à support compact, alors pour tout $t > 0$, $u(\cdot, t)$ est dans l'espace BV . Dans l'article [4], Cheng démontre que l'espace BV n'est pas suffisant pour décrire les solutions des lois de conservations scalaires : pour le flux strictement convexe (mais non uniformément convexe)

$$f(u) = \frac{u^4}{4},$$

il donne une condition initiale u_0 bornée et une solution $u(x, t)$ du problème (1.1) telle que :

$$\text{pour tout } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], u(\cdot, t) \notin BV.$$

En s'inspirant de la preuve de Cheng, on va donner un exemple (voir proposition 6) de condition initiale et de solution qui montrent l'optimalité de l'effet régularisant donné par le théorème 4.

Dorénavant, le flux f considéré est :

$$f(u) = \frac{|u|^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \text{ avec } \alpha > 1.$$

Lemme 8. *f vérifie la condition (3.11) et la dégénérescence de f est $p = \alpha$.*

Démonstration du lemme 8 : on pourra consulter [2].

Lemme 9. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, $g_n(0) = 0$ et pour tout réel $x \neq 0$:*

$$g_n(x) = x^{b_n} \cos\left(\frac{\pi}{x^{c_n}}\right), \text{ avec } b_n = \frac{n+\alpha}{\alpha^2} \text{ et } c_n = \frac{n}{\alpha}.$$

On a : $g_n \in BV^{\frac{1}{\alpha}}([0; 1])$ et $g_n \notin BV^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}}([0; 1])$ (sous réserve que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n} \leq 1$).

Démonstration du lemme 9 : on peut démontrer (ce résultat est admis ici) que pour $c \geq b > 0$, la fonction $g : x \mapsto x^b \cos\left(\frac{\pi}{x^c}\right)$ vérifie :

$$\text{pour tout } s \in \left[0; \frac{b}{c}\right], g \in BV^s([0; 1]) \text{ et } g \notin BV^{\frac{b}{c}}([0; 1]).$$

Pour cela, on utilise une propriété de [2] qui consiste à considérer uniquement la subdivision de $[0; 1]$ formée par les extrémiseurs de g .

Le résultat s'en déduit alors, puisque :

$$\frac{b_n}{c_n} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}.$$

On va toutefois justifier le fait que :

$$g_n \notin BV^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}}([0; 1]).$$

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq N$, on pose :

$$x_k = k^{-\frac{1}{c_n}}.$$

On définit alors la subdivision $\sigma_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset [0; 1]$. On a :

$$\begin{aligned} TV^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}} g_n \{\sigma_N\} &= TV^{\frac{b_n}{c_n}} g_n \{\sigma_N\} \\ &= \sum_{k=2}^N \left| g_n(x_k) - g_n(x_{k-1}) \right|^{\frac{c_n}{b_n}} \\ &= \sum_{k=2}^N \left| k^{-\frac{b_n}{c_n}} + (k-1)^{-\frac{b_n}{c_n}} \right|^{\frac{c_n}{b_n}} \\ &\geq \sum_{k=2}^N \left(k^{-\frac{b_n}{c_n}} \right)^{\frac{c_n}{b_n}} \\ &= \sum_{k=2}^N \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

somme partielle d'une série divergente, d'où le résultat.

Remarque 14. On a : pour tout réel $x \in [0; 1]$, $-1 \leq g_n(x) \leq 1$ et $g_n(1) = -1$.

Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul.

On définit la condition initiale u_0 par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_0(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ u_0(x) = g_n(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ u_0(x) = -1 & \text{si } 1 < x \end{array} \right. \quad (3.32)$$

À l'aide de la méthode des caractéristiques décrite au paragraphe 1.2.1.1, on définit ensuite la fonction u par :

$$\begin{cases} u(x, t) = 0 & \text{si } x < 0 \\ u(x, t) = g_n(y) & \text{si } x = y + \text{signe}(g_n(y)) |g_n(y)|^\alpha t, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, t) = -1 & \text{si } 1 - t < x \end{cases} \quad (3.33)$$

Proposition 6. *La fonction u_0 est bornée. Il existe $s = s(n, \alpha) > 0$ tel que pour tout $t \in]0; s]$, $u(\cdot, t) \in BV^{\frac{1}{\alpha}}(\mathbb{R})$ et $u(\cdot, t) \notin BV^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}}(\mathbb{R})$.*

Démonstration de la proposition 6 : on a bien $u_0 \in L^\infty$; de plus, $u_0 \in BV^{\frac{1}{\alpha}}([0; 1])$ et $u_0 \notin BV^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}}([0; 1])$. Soit $t > 0$. Pour tout réel y , on pose $\theta_t(y) = y + \text{signe}(g_n(y)) |g_n(y)|^\alpha t$. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{|g_n(y)|^\alpha}{y} = O\left(y^{\frac{n}{\alpha}}\right) \text{ en } 0,$$

donc θ_t est dérivable en 0 et $\theta'_t(0) = 1$. De plus, comme $\alpha > 1$, θ_t est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\theta'_t(y) = 1 + g'_n(y) |g_n(y)|^{\alpha-1} t$. On pose $\mu_n(y) = g'_n(y) |g_n(y)|^{\alpha-1}$ pour $y \neq 0$. On va montrer que μ_n est bornée sur $]0; 1]$. On a :

$$\mu_n(y) = \left(b_n y^{b_n-1} \cos\left(\frac{\pi}{y^{c_n}}\right) + \pi c_n y^{-c_n-1} y^{b_n} \sin\left(\frac{\pi}{y^{c_n}}\right) \right) \left| y^{b_n} \cos\left(\frac{\pi}{y^{c_n}}\right) \right|^{\alpha-1},$$

d'où :

$$|\mu_n(y)| \leq \left| \cos\left(\frac{\pi}{y^{c_n}}\right) \right|^{\alpha-1} \left(b_n |y|^{\alpha b_n-1} \left| \cos\left(\frac{\pi}{y^{c_n}}\right) \right| + \pi c_n |y|^{\alpha b_n - c_n - 1} \left| \sin\left(\frac{\pi}{y^{c_n}}\right) \right| \right),$$

Comme $\alpha > 1$, le facteur $\left| \cos\left(\frac{\pi}{y^{c_n}}\right) \right|^{\alpha-1}$ est borné. Comme $\alpha b_n - 1 > \alpha b_n - c_n - 1$, il suffit de voir que $|y|^{\alpha b_n - c_n - 1}$ est borné sur $]0; 1]$. C'est effectivement le cas, puisque :

$$\alpha b_n - c_n - 1 = \frac{n + \alpha}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} - 1 = 0.$$

Ainsi, pour $s = s(n, \alpha)$ assez petit, on a : pour tout $y \in [0; 1]$, pour tout $t \in]0; s]$, $\theta'_t(y) > 0$. On en déduit que pour tout $t \in]0; s]$, θ_t est un homéomorphisme entre $[0; 1]$ et $[0; 1 - t]$. Ceci prouve que pour tout $t \in]0; s]$, $u(x, t)$ est une solution du problème (1.1). De plus, comme u_0 vérifie : $u_0 \in BV^{\frac{1}{\alpha}}(I)$ et $u_0 \notin BV^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}}(I)$, avec $I = [0; 1]$, pour tout $t \in]0; s]$, $u(\cdot, t)$ vérifie $u(\cdot, t) \in BV^{\frac{1}{\alpha}}(J)$ et $u(\cdot, t) \notin BV^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}}(J)$, avec $J = \theta_t(I) = [0; 1 - t]$. De plus, étant donné la définition de $u(\cdot, t)$ (constante en dehors de J), on a en fait : $u(\cdot, t) \in BV^{\frac{1}{\alpha}}(\mathbb{R})$ et $u(\cdot, t) \notin BV^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n}}(\mathbb{R})$.

Références

- [1] Vladimir Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, Mir, quatrième édition, 1988.
- [2] Christian Bourdarias, Marguerite Gisclon et Stéphane Junca, *Fractional BV spaces and applications to scalar conservation laws*, preprint, 2012.
- [3] Gui-Qiang Chen, Michel Rascle, *Initial layers and uniqueness of weak entropy solutions to hyperbolic conservation laws*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2000.
- [4] Kuo-Shung Cheng, *The space BV is not enough for hyperbolic conservation laws*, Journal of Differential Equations, 1983.
- [5] Constantine M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer-Verlag, 2000.
- [6] Laurence C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [7] Lars Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, Springer-Verlag, 1997.
- [8] John Hubbard et Beverly West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Vuibert, 1999.
- [9] Stéphane Junca, *High frequency waves and maximal smoothing effects for multidimensional nonlinear scalar conservation laws*, preprint, 2011.
- [10] Peter D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Communications on pure and applied mathematics, volume 10, 1957.
- [11] Peter D. Lax, *The formation and decay of shock waves*, American mathematical monthly, 1972.
- [12] Peter D. Lax, *Hyperbolic partial differential equations*, American Mathematical Society, 2006.
- [13] Tai-Ping Liu et Michel Pierre, *Source-solutions and asymptotic behavior in conservation laws*, Journal of differential equations, 1984.
- [14] Evgueni Y. Panov, *Existence of strong traces for generalized solutions of multidimensional scalar conservation laws*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, 2005.
- [15] Denis Serre, *Systèmes de lois de conservation*, Diderot Éditeur, 1996.
- [16] Joel Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, second edition, 1994.
- [17] Alexis Vasseur, *Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2001.