

TD 2 pour le cours d'Analyse 2 L2 PC et SF-P
Semaine du 14 au 18 septembre 2015
Suites numériques: définitions.

Exercice 1. On rappelle que

- (1) Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.
- (2) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- (3) Toute suite décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.
- (4) Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Montrer et mémoriser les résultats suivants:

- Suites arithmétiques : $(u_n) = (u_0 + an)$
 - (1) Si $a > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
 - (2) Si $a = 0$, (u_n) est constante et tend vers u_0
 - (3) Si $a < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- Suites géométriques : $(u_n) = (u_0 + r^n)$
 - (1) Si $u_0 = 0$, (u_n) est constante et tend vers 0.
 - (2) Si $r \leq -1$, et $u_0 \neq 0$, (u_n) ne converge pas.
 - (3) Si $-1 < r < 1$, (u_n) tend vers 0.
 - (4) Si $r = 1$, (u_n) est constante et tend vers u_0 .
 - (5) Si $r > 1$ et $u_0 > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
 - (6) Si $r > 1$ et $u_0 < 0$, (u_n) tend vers $-\infty$.
- Suites de Riemann : $(u_n) = (n^\alpha)$
 - (1) Si $\alpha > 0$, (u_n) tend vers $+\infty$.
 - (2) Si $\alpha = 0$, (u_n) est constante et tend vers 1.
 - (3) Si $\alpha < 0$, (u_n) tend vers 0.

Exercice 2. En utilisant la définition de limite d'une suite, montrer que les suites suivantes convergent vers 1.

- (1) $u_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{n+1}$
- (2) $u_n = \frac{2n+3}{2n+1}$
- (3) $u_n = \frac{n^2+1}{n^2+n+1}$
- (4) $u_n = 1 + \frac{\sin(n^2)}{n+1}$
- (5) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n+1}$
- (6) $u_n = \frac{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

Pour $\epsilon = 1/10$ et $\epsilon = 1/100$, déterminer le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite restent dans l'intervalle $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$.

Exercice 3. En utilisant la définition de limite d'une suite, montrer

- (1) $\lim \frac{2n}{3n^2+1} = 0$
- (2) $\lim \frac{2n^2+1}{7n^2+5} = \frac{2}{7}$
- (3) $\lim \frac{\sin(n^2+3)}{\sqrt{n+1}} = 0$
- (4) $\lim(n \sin(\frac{1}{n^2})) = 0$

Exercice 4. On rappelle que

- (1) *La somme de deux suites convergeant vers une limite finie est convergente et sa limite est la somme des limites.*
- (2) *Le produit de deux suites convergeant vers une limite finie est convergent et sa limite est le produit des limites.*

Qu'en est-il des cas où une au moins des limites est infinie? Dresser les tableaux des différentes possibilités et illustrer les cas indéterminés à l'aide de plusieurs exemples.

Exercice 5. Soit (u_n) une suite convergeant vers l . Montrer que la suite v_n définie par

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

converge elle aussi vers l . En donnant un contre-exemple, démontrer que la réciproque est fausse.

Exercice 6. Considérons la suite (u_n) définie par:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ et } u_0 = 1.$$

- (1) En utilisant le binôme de Newton, montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

- (2) En utilisant que pour tout entier $k \geq 1$, on a que $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$$

Indication: on rappelle que pour $x \neq 1$,

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

- (3) En utilisant le binôme de Newton encore une fois, montrer que la suite (u_n) est croissante.

On a ainsi démontré que la suite (u_n) est à la fois croissante et majorée, elle est donc convergente. Sa limite jouant un rôle très important en analyse, on la désigne par la lettre e . Le nombre réel e est un nombre irrationnel dont la valeur approchée est 2.71828...