SORBONNE UNIVERSITÉ & UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

M2 DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES DE L'IMJ PRG

Familles de surfaces K3 et leurs automorphismes

Mémoire de Master 2

Étudiant :
Alexis Roëckel

Encadrant :
Andréas Höring





2025/2026

Table des matières

0 Introduction **4**

1 Préliminaires **6**
1.1 Théorie des surfaces complexes 6
1.2 Les surfaces K3 9
1.3 Réseaux 10

2 Généralités sur les surfaces K3 **15**
2.1 Cohomologie des surfaces K3 15
2.2 Fibrés en droites sur les surfaces K3 18
2.2.1 Généralités sur les systèmes linéaires 18
2.2.2 Fibrés en droites amples et nefs 22
2.2.3 Systèmes linéaires complet contenant une courbe lisse 28
2.3 Théorèmes de Torelli 29

3 Cônes dans l'espace des 1-cycles des K3 **32**
3.1 Chambres et murs 34
3.2 Les cônes ample, nef et kählerien 38
3.2.1 Cônes ample et nef d'une K3 projective 38
3.2.2 Cône de Kähler 41
3.3 Le cône positif et le cône de Mori 42
3.4 Théorèmes de classifications de Kovács 49
3.5 Exemples de surfaces K3 pour chacune des possibilités . . 57

4 Familles de surfaces K3 **60**
4.1 Lieu de Noether-Lefschetz 60
4.2 Automorphismes dans les familles de surfaces K3 projectives. 67
4.2.1 Un sous-groupe des automorphismes commun dans la famille. 68

4.2.2 Un théorème de densité d'Oguiso 73

Chapitre 0

Introduction

Le but de ce mémoire est d'exposer certains résultats d'Oguiso publié dans son article [Ogu03]. Il a été réalisé sous l'encadrement d'Andreas Höring que je remercie grandement pour avoir consacré une partie de son temps à répondre à mes questions, à relire mon travail et pour ses conseils avisés.

Le chapitre 1 consiste en des rappels de notions préliminaires. Dans un premier temps, il sera énoncé l'ensemble des notions et théorèmes de la théorie des surfaces complexes trouvables dans [Ven84] et nécéssaires à la compréhension de la suite de ce mémoire. On trouvera ensuite la définition et des exemples de surface K3. Enfin, la théorie des réseaux sera primordiale dans la démonstration des théorèmes d'Oguiso et c'est pourquoi on aura besoin de quelques propriétés de ces derniers exposés en troisième section de ce chapitre.

On rendra compte ensuite dans le chapitre 2 d'un certain nombre de propriétés utiles générales des surfaces K3. Ce chapitre est essentiellement basé sur [Huy16, Chapitres 1, 2, 6 et 7]. D'abord on discutera des propriétés topologiques et cohomologiques des surfaces K3. Puis dans un second temps, on énoncera le théorème de Riemann-Roch sur les surfaces K3 et on donnera quelques corollaires concernant les fibrés en droites. Cette étude permettra par exemple de donner un critère numérique d'amplitude pour les fibrés en droites 2.2.20. Finalement, on aura besoin d'utiliser dans la suite les théorèmes de Torelli 2.3.6 et 2.3.7 et l'application des périodes et on trouvera ces notions présentées dans la dernière partie de ce chapitre.

Dans le chapitre 3, on présentera plusieurs propriétés des cônes de l'espace des 1-cycles de surfaces K3. On discutera des conséquences de l'existence

des courbes rationnelles pour comprendre par exemple le cône ample d'une surface K3 comme le cône délimité par les hyperplans orthogonaux aux courbes rationnelles et lisses 3.2.4. On s'interressera ensuite au cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ d'une surface K3 formée des limites de classes de $\mathbf{R}$-diviseurs effectifs. Le théorème principal de la théorie concernant ce cône est le théorème de classification de Kovács 3.4.1 et 3.4.4 permettant de décrire la géométrie du cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ d'une surface K3 projective. Nous expliciterons également des exemples de surfaces K3 correspondant aux différents types donnés par le théorème de Kovács. Cette dernière partie est essentiellement inspirée de l'article [Kov94] et de [Huy16, Section 8.3].

Le dernier chapitre de ce travail, le chapitre 4, consistera à étudier les théorèmes d'Oguiso de [Ogu03]. On démontrera par exemple l'existence d'un sous groupe commun à tous les groupes automorphismes des fibres d'une famille de surface K3 au dessus d'un petit disque privé d'un nombre fini de points 4.2.3. Ce sous-groupe commun sera d'indice inférieur à 66 dans le groupe d'automorphisme d'une fibre générale ce qui consistitue amélioration du résulat [Ogu03, Thm 1.5 (1)]. On montrera également un résultat de densité concernant les fibres ayant un groupe d'automorphisme infini 4.2.11.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Théorie des surfaces complexes

Avant de commencer à parler de surface K3, j'aurai besoin de quelques résultats préliminaires sur les propriétés cohomologiques générales des surfaces complexes compactes. Sauf mention du contraire, dans ce documents toutes les variétés seront lisses.

Commençons par un théorème de dualité :

Théorème 1.1.1 (Dualité de Serre). *Soit X une variété complexe et compacte de dimension n et $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur X alors, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, on a*

$$H^k(X, \mathcal{F}) \simeq H^{n-k}(X, K_X \otimes \mathcal{F}^\vee).$$

Où $K_X := \bigwedge^n \Omega_X$ est le faisceau canonique de X et où $\mathcal{F}^\vee$ est le dual de $\mathcal{F}$. En particulier si X est K_X-trivial c'est à dire que $K_X \simeq \mathcal{O}_X$, cette dualité s'écrit plutôt,

$$H^k(X, \mathcal{F}) \simeq H^{n-k}(X, \mathcal{F}^\vee).$$

Cette condition est vérifiée par définition chez les surfaces K3.

Notre objectif est maintenant d'énoncer un théorème de Riemann-Roch pour les surfaces complexes. Pour ce faire, nous devons introduire la forme d'intersection de deux fibrés en droites. Je fixe dans toute cette partie une surface S complexe et compacte non nécessairement projective.

Définition 1.1.2. Soient L_1, L_2 deux fibrés en droites sur S ; la forme d'in-

tersection $L_1 \cdot L_2$ est l'entier défini par :

$$L_1 \cdot L_2 := \chi(S, \mathcal{O}_S) - \chi(S, L_1^\vee) - \chi(S, L_2^\vee) + \chi(S, L_1^\vee \otimes L_2^\vee) \in \mathbb{Z}$$

où $\chi(S, \mathcal{F})$ désigne la caractéristique d'Euler du faisceau $\mathcal{F}$. Nous utiliserons la notation L^2 pour $L \cdot L$ et où $L_1^\vee, L_2^\vee$ est sont les duaux de L_1, L_2.

De plus, si D est un diviseur de X et L un fibré en droite sur X, on notera $D \cdot L := \mathcal{O}_X(D) \cdot L$. On peut montrer que $D \cdot L = \deg(L|_D)$ voir [Bea, Lem I.6].

Théorème 1.1.3. *La forme d'intersection est symétrique et bilinéaire sur* $\mathrm{Pic}(X)$.

Démonstration. Admis ; voir [Bea, thm I.4]. □

Dans le cas où S est une surface complexe et compacte, on peut également montrer, voir [Bea, Para I.10], que $L_1 \cdot L_2 = c_1(L_1) \smile c_1(L_2)$. Cette relation est bien définie car $c_1(L_1) \smile c_1(L_2)$ appartient à $H^4(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ grâce à la dualité de Poincaré et le fait qu'une orientation est automatiquement fixée pour les variété complexes.

Théorème 1.1.4 (Riemann-Roch pour les surfaces - [Bea, Thm I.12]). *Soit L un fibré en droites sur S. On a*

$$\chi(S, L) = \chi(S, \mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}\left(L^2 - L \cdot K_S\right)$$

Démonstration. Calculons $L^\vee \cdot (L \otimes K_S^\vee)$ de deux manières différentes :

$$L^\vee \cdot (L \otimes K_S^\vee) = L^2 - L \cdot K_S \tag{1.1}$$

en utilisant la bilinéarité de la forme d'intersection et le fait que $L \cdot \mathcal{O}_S = 0$. De plus, on a

$$L^\vee \cdot (L \otimes K_S^\vee) = \chi(S, \mathcal{O}_S) - \chi(S, L) - \chi(S, L^\vee \otimes K_S) - \chi(S, L \otimes L^\vee \otimes K_S)$$

De plus, puisque S est de dimension paire, la dualité de Serre donne que $\chi(S, \mathcal{F}) = \chi(S, K_X \otimes \mathcal{F}^\vee)$. Donc en particulier $\chi(S, \mathcal{O}_S) = \chi(S, K_S)$ et $\chi(S, L) = \chi(S, L^\vee \otimes K_S)$. On a donc

$$L^\vee \cdot (L \otimes K_S^\vee) = 2\chi(S, \mathcal{O}_S) - 2\chi(S, L) \tag{1.2}$$

Les équations (1) et (2) prouvent donc que

$$\chi(S, L) = \chi(S, \mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}\left(L^2 - L \cdot K_S\right).$$

□

Je vais maintenant énoncer sans preuve un dernier théorème. On aura besoin dans son énoncé de la notion de classe de Chern $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$ d'un fibré vectoriel complexe E sur une variété topologique X, deux définitions différentes peuvent être trouvées dans [Huy04, Chap 4.4] pour les variétés complexes et [Voi02, Chap 11.2] dans le cas topologique général. Quand X est une variété complexe de dimension n, on note $c(X) := c(\mathcal{T}_X) = -c(K_X)$ et on a $\int_X c_n(X) = \chi^{top}(X)$ où $\chi^{top}(X)$ est la caractéristique d'Euler topologique de X c'est à dire la caractéristique d'Euler du faisceau $\mathbf{Z}$ pour la topologie analytique de X.

Théorème 1.1.5 (Hirzebruch-Riemann-Roch pour les surfaces). *Soit S une surface complexe compacte et E un fibré vectoriel de rang r sur S, on a alors*

$$\chi(S, E) = \int_S ch(E)td(S)$$

Où ici :

$$ch(E) := r + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1(E)^2 - 2c_2(E))$$
$$td(S) := 1 + \frac{1}{2}c_1(S) + \frac{1}{12}(c_1(S)^2 + c_2(S))$$

Plus explicitement, si j'identifie $H^4(X, \mathbf{Z})$ à $\mathbf{Z}$ via la dualité de Poincaré appliquée avec l'orientation canonique de S donnée par sa structure complexe, on obtient la formule :

$$\chi(S, E) = \frac{r}{12}(K_S^2 + \chi^{top}(S)) - \frac{1}{2}c_1(E) \smile c_1(K_S) + \frac{1}{2}c_1(E)^2 - c_2(E).$$

Exemple 1.1.6. — Si on applique la formule précédente au fibré en droite trivial $\mathcal{O}_S$, puisque $c_1(\mathcal{O}_S) = 0$, on trouve :

$$\chi(S, \mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + \chi^{top}(S))$$

Cette formule pour la caractéristique d'Euler du faisceau $\mathcal{O}_S$ s'appelle *formule de Noether*. En conséquence la formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch se réécrit :

$$\chi(S, E) = \chi(S, \mathcal{O}_S) - \frac{1}{2}c_1(E) \smile c_1(K_S) + \frac{1}{2}c_1(E)^2 - c_2(E).$$

— Pour un fibré en droite L sur S, on trouve maintenant

$$\begin{aligned}\chi(S, L) &= \chi(S, \mathcal{O}_S) - \frac{1}{2}c_1(L) \smile c_1(K_S) + \frac{1}{2}c_1(L)^2 \\ &= \chi(S, \mathcal{O}_S) - \frac{1}{2}L \cdot K_S + \frac{1}{2}L^2.\end{aligned}$$

On retrouve donc le théorème de Riemann-Roch 1.1.4.

1.2 Les surfaces K3

Soit X une surface de Riemann compacte de genre g. Supposons que son fibré canonique K_X soit trivial, *i.e.* $K_X \simeq \mathcal{O}_X$; en particulier, si K est un diviseur canonique, alors $\deg(K) = 0$. Mais nous savons, par la formule de Riemann-Roch, que $\deg(\mathrm{K}) = 2g - 2$, on en déduit donc que $g = 1$ et que X est une courbe elliptique.

La question de la générélisation de ce résultat est naturelle : *quelles sont les variétés complexes compactes dont le fibré canonique est trivial ?*

En dimension 2, André Weil a fait remarquer, dans son article [Wei], que la classe de telles surfaces X complexe lisse compacte avec $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ et vérifiant $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ possède une géométrie riche et rigide.

Définition 1.2.1 (Surface K3). On appelle surface K3 une surface complexe X compacte dont le fibré canonique est trivial $K_X \simeq \mathcal{O}_X$ et vérifiant $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Remarque 1.2.2. Weil nomma ces surfaces les surfaces K3 « en l'honneur de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire ».

Remarque 1.2.3. Il est important de noter que de nombreux auteurs définissent une surface K3 comme une surface lisse, compacte, Kählerienne, de fibré canonique trivial et simplement connexe. Les deux définitions sont équivalentes : voir [Siu83] pour le caractère Kählérien et voir [Huy16, Coro 7.1.4] pour le fait qu'elles sont simplement connexes.

Exemple 1.2.4. — Soit X une quartique lisse de $\mathbf{P}^3$ définie par le polynôme homogène f. Tout d'abord, d'après la formule d'adjonction [Huy04, Prop 2.2.17] et le corollaire [Huy04, Coro 2.4.9], on sait que

$$K_X \simeq \mathcal{O}_X(\deg(X) - 3 - 1)|_X = \mathcal{O}_X.$$

De plus, on a la une suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Mais d'après [Har77, Thm III.5.1], on a

$$H^1(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}) = H^2(\mathbf{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-4)) = 0,$$

et la suite exacte longue en cohomologie induite par la suite courte montre que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Cette preuve de $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ a l'avantage d'être valable dans un cadre algébrique plus général que spécifiquement sur le corps $\mathbf{C}$. En revanche, on peut donner sur $\mathbf{C}$ la preuve suivante : le théorème sur les sections hyperplanes de Lefschetz ou plus précisement le corollaire [Voi02, Coro 13.24] prouve que $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$ et donc que $H^1(X, \mathbf{C}) = 0$. On en déduit donc que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ grâce au théorème de décomposition de Hodge appliqué à X qui est compacte et kählérienne puisque X est projective.

Nous avons ainsi notre premier exemple de surface K3 ; un exemple intéressant est celui où l'on prend pour X la quartique de Fermat définie par le polynôme $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

1.3 Réseaux

Dans cette partie je vais lister les notions et propriétés des réseaux que j'utilise dans ce travail.

Définition 1.3.1. — On appelle *réseau* la donnée d'un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini Γ muni d'une forme quadratique $q : \Gamma \to \mathbf{Z}$.

- On dira qu'un réseau Γ est *unimodulaire* quand le déterminant de la matrice symétrique associée à q vaut ± 1. C'est équivalent à supposer que le morphisme $\Gamma \to \Gamma^* := \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z})$ donnée par $x \in \Gamma \mapsto (x, _) \in \Gamma^*$ est bijectif.
- On dira que Γ est de *signature* (s, t) quand la signature de $q \otimes \mathbf{R}$ est de signature (s, t). Ici j'entend par $q \otimes \mathbf{R}$ la forme quadratique réelle définie sur $\Gamma_{\mathbf{R}}$ donnée par la matrice symétrique de q dans une base de Γ qui est donc aussi une base de Γ_R.
- On dira qu'un réseau Γ est *non dégénéré* s'il est de signature (s, t) et que $s + t = \mathrm{rg}(\Gamma)$ et on dira dans le cas contraire que Γ est dégénéré. Notons qu'un réseau unimodulaire est nécéssairement non dégénéré.
- On dira que Γ est *défini* s'il est de signature (s, t) et que s ou t est nul et dans le cas contraire on dira que Γ est *indéfini*.
- On dira qu'un réseau Γ est *pair* si les valeurs que prend la forme forme quadratique $q(x)$ sont toutes paires. Dans le cas contraire le réseau sera dit *impair*.

— Si on dispose de deux réseaux $(\Gamma_1, q_1), (\Gamma_2, q_2)$, on peut alors former leur *somme directe* qui est le réseau donné par la forme quadratique $q(x_1 + x_2) := q_1(x_1) + q(x_2)$ sur $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$. On voit que si Γ_i est de signature (p_i, q_i) alors $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ est de signature $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ et qu'il est unimodulaire si et seulement si Γ_1 et Γ_2 le sont.

— Si on dispose d'un réseau (Γ, q), on notera aussi $\Gamma(-1)$ le *réseau opposé* donné par la forme quadratique $-q$ sur le module Γ. Si Γ est de signature (s, t) alors $\Gamma(-1)$ est de signature (t, s) et $\Gamma(-1)$ est unimodulaire si et seulement si Γ l'est.

— Pour un réseau (Γ, q), on notera $O(\Gamma)$ le *groupe orthogonal* de Γ, c'est à dire le groupe des automorphismes g du module Γ vérifiant $q(g(x)) = q(x)$ pour tout $x \in \Gamma$.

— Si on dispose de deux réseaux $(\Gamma_1, q_1), (\Gamma_2, q_2)$ alors un morphisme $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ entre réseau est un morphisme de $\mathbf{Z}$-module vérifiant $q_2(f(x)) = q_1(x)$. On voit avec cette définition que le groupe orthogonal $O(\Gamma)$ n'est rien d'autre que le groupe des automorphismes de réseaux de Γ.

Pour plus de détails voir [Ser77] (à noter que Serre définit un réseau comme étant automatiquement unimodulaire) ou chapitre 14 de [Huy16].

Exemple 1.3.2. — On note $\mathbf{I}_+$ (*resp.* $\mathbf{I}_-$) le réseau donné par la forme quadratique $q(x) = x^2$ (*resp.* $q(x) = -x^2$) sur $\mathbf{Z}$. On notera de plus $s\mathbf{I}_+ \oplus t\mathbf{I}_-$ le réseau donné par la forme quadratique $q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{t} x_i^2$ sur $\mathbf{Z}^{s+t}$. Le réseau $s\mathbf{I}_+ \oplus s\mathbf{I}_-$ est unimodulaire impair et de signature (s, t).

— On note U le réseau donné par la forme quadratique $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ sur $\mathbf{Z}^2$ et on l'appelle *réseau hyperbolique*. C'est un réseau unimodulaire, pair et de signature (1,1). Remarquons aussi que $U \simeq U(-1)$.

— On note E_8 le réseau donné par la forme quadratique de matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifie que ce réseau est unimodulaire, pair et de signature (8,0).

— On appellera réseau K3 le réseau $U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$. Je noterai tout le temps ce réseau Λ dans ce travail.

Le nom de ce dernier exemple est suggéré par le théorème 1.3.4 et le théorème de classification suivant :

Théorème 1.3.3 (Classification des réseaux unimodulaires, pairs, indéfinis - [Ser77]). *Tout réseaux Γ unimodulaire, pair, indéfini de signature (s,t) avec $s \geq t$ est isomorphe à $U^{\oplus p} \oplus E_8^{\oplus q}$ où ici $p = t/2$ et $q = (s-t)/8$.*

Dans le cas où Γ vérifie $s < t$ alors en considérant le réseau opposé $\Gamma(-1)$, on obtient $\Gamma \simeq U^{\oplus p'} \oplus E_8(-1)^{\oplus q'}$ où ici $p' = s/2$ et $q' = (t-s)/8$.

Mais on a aussi le résultat :

Théorème 1.3.4 ([Huy16] prop 1.3.5). *Si X est une surface K3, alors le module $H^2(X, \mathbf{Z})$ muni du cup-product $\smile$ est un réseau unimodulaire, pair, indéfini de signature (3,19). Il est donc isomorphe au réseau K3 Λ définit ci-dessus.*

Dans le théorème précédent, le cup-product $\smile$ définit de manière canonique une forme quadratique sur $H^2(X, \mathbf{Z})$ puisque si $x, y \in H^2(X, \mathbf{Z})$ alors $x \smile y \in H^4(X, \mathbf{Z})$ mais l'orientation naturelle de X donnée par sa structure complexe définit un isomorphisme canonique $H^4(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$.

Définition 1.3.5. Si Γ_1 est un sous réseau de Γ_2, c'est à dire qu'on a un morphisme injectif de réseau $\Gamma_1 \hookrightarrow \Gamma_2$, alors on dit que Γ_1 est primitif dans Γ_2 si ce morphisme est de conoyau libre.

Proposition 1.3.6. *Un sous réseau Γ_1 de Γ_2 est primitif si et seulement si il existe une famille libre $(v_1, ..., v_n)$ d'élément de Γ_2 telle que*

$$\Gamma_1 \oplus \mathbf{Z} \cdot v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z} \cdot v_n = \Gamma_2.$$

Démonstration. Pour le sens réciproque, on calcule

$$\Gamma_2/\Gamma_1 = \frac{\Gamma_1 \oplus \mathbf{Z} \cdot v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z} \cdot v_n}{\Gamma_1} = \mathbf{Z} \cdot v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z} \cdot v_n$$

qui est libre.

Pour le sens direct, on suppose que Γ_1 est primitif c'est à dire que Γ_2/Γ_1 est libre. On se donne alors $[v_1], ..., [v_n]$ des élements non nuls du quotient

Γ_2/Γ_1 qui forment une base. Alors si on se donne $x \in \Gamma_2$, il existe des entiers $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $[x] = \sum_i \lambda_i [v_i]$ dans Γ_2/Γ_1. Ainsi, on a $x - \sum_i \lambda_i v_i \in \Gamma_1$ et on voit comme ça que Γ_2 est engendré par Γ_1 et les vecteurs v_i. De plus, aucun des v_i ne se trouve dans Γ_1 car autrement l'un des v_i vérifierait $[v_i] = 0$ et donc

$$\Gamma_1 \oplus (\mathbf{Z}v_1 + \cdots + \mathbf{Z}v_n) = \Gamma_2.$$

Il reste donc à voir que la famille formée des v_i est libre. Mais si on avait une relation $\mathbf{Z}$-linéaire $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ alors on aurait dans le quotient la relation $\mathbf{Z}$-linéaire $\sum_{i=1}^n \lambda_i [v_i] = 0$, ce qui est absurde compte tenu de la liberté de la famille $([v_1], ..., [v_n])$ dans Γ_2/Γ_1. Par conséquent, on a bien

$$\Gamma_1 \oplus \mathbf{Z} \cdot v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z} \cdot v_n = \Gamma_2.$$

□

Proposition 1.3.7. *Si X est une surface K3 projective alors le groupe de Picard $Pic(X)$ muni du produit d'intersection est un sous réseau primitif de $H^2(X, \mathbf{Z})$.*

Démonstration. On sait que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ donc la suite exacte exponentielle dit que

$$\mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$$

Rappellons qu'on peut définir le groupe de Néron-Sévéri $\mathrm{NS}(X)$ comme l'image de ce morphisme. Le conoyau de ce morphisme est isomorphe à

$$H^2(X, \mathbf{Z})/\mathrm{Ker}(H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)) \simeq \mathrm{Im}(H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X))$$

Or le groupe de droite est sans torsion donc la classification des $\mathbf{Z}$-modules de type finis dit que $H^2(X, \mathbf{Z})/\mathrm{Pic}(X)$ est libre.

□

J'utiliserai aussi dans la preuve du théorème 3.4.4 :

Théorème 1.3.8 ([Huy16] corollaire 3.8 - [Kov94] lemme 4.1). *Si X est une surface K3 projective dont le rang de Picard $\rho(X) \geq 12$, alors il existe une injection de réseau $U \hookrightarrow \mathrm{NS}(X)$. En particulier, si on note e, f les éléments de la base de U alors $(e - f)^2 = -2$ donc il existe une classe de carré -2 dans $\mathrm{NS}(X)$.*

Pour fournir des exemples de surfaces K3 en ne spécifiant que leur réseau de Picard, j'aurai besoin de :

Proposition 1.3.9 ([Huy16] corollaire 14.3.1). *Si N est un réseau pair de signature $(1, \rho - 1)$ où $\rho \leq 10$ alors il existe X une surface K3 telle que* $\mathrm{NS}(X) \simeq N$.

Chapitre 2

Généralités sur les surfaces K3

2.1 Cohomologie des surfaces K3

Tout d'abord, un théorème de topologie algébrique de [Fre82] affirme que le type d'homéomorphisme d'une variété topologique réelle X de dimension 4 est entièrement déterminé par un $\mathbf{F}_2$-invariant appelé invariant de Kirby-Siebenmann et la forme d'intersection

$$\smile : H^2(X, \mathbf{Z}) \times H^2(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$$

Il est donc tout à fait naturel de s'interesser à la structure de $H^2(X, \mathbf{Z})$. Dans cette partie, nous allons donc étudier la cohomologie entière des surfaces K3.

Il est important de noter, concernant cette introduction, que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes à la surface quartique de Fermat [Huy16, Thm 7.1.1]. Cette propriété ne sera en revanche pas utilisée dans ce travail.

Pour cela, remarquons que le théorème de Riemann-Roch admet une formulation plus précise dans le cas des surface K3.

Théorème 2.1.1 (Riemann-Roch pour les K3). *Soit X une surface K3 et L un fibré en droites sur X. On a*

$$\chi(X, L) = 2 + \frac{L^2}{2}$$

Démonstration. La dualité de Serre implique $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 2$ puisque $\mathcal{O}_X^\vee = \mathcal{O}_X$, et la forme d'intersection vérifie $L \cdot K_X = L \cdot \mathcal{O}_X = 0$; on obtient donc la formule. □

Lemme 2.1.2. *Soit X une surface K3, son groupe de Picard* $\mathrm{Pic}(X)$ *est sans torsion.*

Démonstration. Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un élément de torsion et fixons un fibré en droites $M \in \mathrm{Pic}(X)$. Remarquons que $M \cdot _ : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{Z}$ est un morphisme de groupes ; or $\mathbf{Z}$ n'a aucun élément de torsion, donc $M \cdot L = 0$, et en particulier $L^2 = 0$. De plus, la dualité de Serre 1.1.1 pour les K3 et le théorème de Riemann-Roch 2.1.1 impliquent

$$h^0(X, L) - h^1(X, L) + h^0(X, L^\vee) = 2$$

Ainsi, L ou $L^\vee$ possède une section non triviale s ; supposons, sans perte de généralité, qu'il existe s une section globale non identiquement nulle de L. Mais il existe m tel que $L^{\otimes m} \simeq \mathcal{O}_X$, donc $s^{\otimes m}$ correspond sous cet isomorphisme à un nombre complexe $z \in \mathbf{C} = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Ainsi $s^{\otimes m}$ est une section constante. serait nulle. Par conséquent, si s s'annule $s^{\otimes m}$ s'annule également mais alors comme c'est une constante $s^{\otimes m} = 0$ et donc $s = 0$ ce qui est absurde. On en déduit que s ne s'annule pas. Donc L possède une section holomorphe ne s'annulant nulle part, ce qui implique que $L \simeq \mathcal{O}_X$ est trivial. □

Théorème 2.1.3. *Soit X une surface K3, sa cohomologie entière est :*

$$H^0(X, \mathbf{Z}) = H^4(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \text{ et } H^1(X, \mathbf{Z}) = H^3(X, \mathbf{Z}) = 0$$

Enfin $H^2(X, \mathbf{Z})$ est isomorphe au réseau K3 voir 1.3.4 en particulier $H^2(X, \mathbf{Z})$ est de rang 22. De plus la caractéristique d'Euler topologique de X est 24.

Démonstration. Le fait que $H^0(X, \mathbf{Z}) = H^4(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ découle de la dualité de Poincaré, car on a toujours $H^0(X, \mathbf{Z}) = H_0(X, \mathbf{Z})$.
Ensuite, par hypothèse on a que $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ et puisque X est de dimension complexe 2, on a $H^3(S, \mathcal{O}_S) = 0$. Écrivons la suite exponentielle :

$$0 \to \mathbf{Z}_X \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^\times \to 0$$

En considérant la suite longue induite en cohomologie, on en déduit que $H^1(X, \mathbf{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est une injection, et donc $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$. De plus, la dualité de Poincaré donne $H_3(X, \mathbf{Z}) = 0$, et donc le théorème des coefficients universels implique que

$$H^3(X, \mathbf{Z}) = H_3(X, \mathbf{Z})_{\text{free}} \oplus H_2(X, \mathbf{Z})_{\text{tors}} = H_2(X, \mathbf{Z})_{\text{tors}}.$$

On trouve également $0 \to \mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)$. Nous avons prouvé que $\mathrm{Pic}(X)$ n'a aucun élément de torsion au 2.1.2, et il en va de même pour $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ puisqu'il s'agit d'un espace vectoriel complexe. Donc $H^2(X, \mathbf{Z})$ n'a pas non plus d'élément de torsion ; par conséquent, la dualité de Poincaré indique que $H_2(X, \mathbf{Z})_{tors} = 0$. Ainsi $H^3(X, \mathbf{Z}) = 0$.

Il reste à calculer la caractéristique d'Euler topologique de X. Pour celà, on utilise la formule de Noether 1.1.6 qui donne pour les surfaces K3 :

$$12\chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi^{\mathrm{top}}(X)$$

Mais $H^2(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbf{C}$ d'après la dualité de Serre 1.1.1 et par hypothèse $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Ainsi $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 2$ et donc $\chi^{\mathrm{top}}(X) = 24$. □

Remarque 2.1.4. Nous venons de voir que $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$, c'est un résultat qui aurait été immédiat dans le cas où l'on avait supposé dans la définition d'une surface K3 qu'elle était nécéssairement simplement connexe (voir [Huy16, Coro 7.1.4] pour l'équivalence des définitions).

Enfin, nous donnons une description de la cohomologie de Dolbeault, pour cela nous auront besoin d'admettre le résultat de [Siu83] disant que toute surface K3 est kählérienne.

Théorème 2.1.5 (Diamant de Hodge d'une K3). *Le diamant de Hodge d'une surface K3 est de la forme :*

$$\begin{array}{ccccc} & & h^{0,0} & & \\ & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\ h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\ & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\ & & h^{2,2} & & \end{array} = \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Démonstration. Les surfaces K3 sont compactes et kählériennes donc le théorème de décomposition de Hodge s'applique. On l'utilisera dans cette demonstration.

Tout d'abord, la dualité de Poincaré et le théorème de décomposition implique que

$$h^{2,2} = \dim H^4(X, \mathbf{C}) = \dim H^0(X, \mathbf{C}) = h^{0,0} = 1.$$

De plus, on a $H^0(X, \Omega_X^2) = H^0(X, K_X) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbf{C}$ par hypothèse, donc $h^{2,0} = 1$ et par conjugaison $h^{0,2} = 1$. Nous avons donc calculé les

extrémités du losange.

Maintenant on utilise le fait que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, *i.e.* $h^{0,1} = 0$; ainsi la conjugaison et la dualité de Serre donnent $0 = h^{0,1} = h^{1,0} = h^{2,1} = h^{1,2}$.

Il reste à calculer le dernier coefficient $h^{1,1}$. D'après le théorème de Hodge,

$$22 = \dim H^2(X, \mathbf{C}) = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2} = 2 + h^{1,1}.$$

On trouve donc que $h^{1,1} = 20$. □

2.2 Fibrés en droites sur les surfaces K3

2.2.1 Généralités sur les systèmes linéaires

Soit X une variété projective lisse de dimension n, et soit L un fibré en droites sur X. On note $|L|$ le système linéaire complet associé à L, c'est-à-dire l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à L. On rappelle que ce dernier est muni d'une structure de variété projective donnée par

$$|L| \simeq \mathbb{P}(H^0(X, L)).$$

Pour une section globale s de L, on peut parler de son diviseur de zéros $Z(s)$, qui est un diviseur effectif linéairement équivalent à L. Celui-ci est défini en se donnant une trivialisation locale *ie* un ouvert U et une section $e \in H^0(U, L)$ engendrant $L|_U$, puis on écrit $s = f \cdot e$ pour une fonction $f \in H^0(U, \mathcal{O}_X)$ et on note $Z(s)|_U := Z(f)|_U$. On peut vérifier que cette construction est indépendante du choix de la trivialisation et que les $Z(s)|_U$ se recollent pour former un diviseur global $Z(s)$ effectif voir [Har77, Chap II.6].

Pour un système linéaire $V \subseteq H^0(X, L)$, on peut considérer son *schéma de base*

$$\mathrm{Bs}(V) := \bigcap_{s \in V} Z(s).$$

Ici, un diviseur de Weil effectif $D = Z(s)$ est vu comme un sous-schéma de X de codimension 1, potentiellement réductible et non réduit.

Le système linéaire V définit une application rationnelle

$$\varphi_V : X \dashrightarrow \mathbf{P}(V)$$

qui est régulière sur $X \setminus \mathrm{Bs}(V)$. Pour décrire ce morphisme, on se donne une base $s_1, ..., s_n$ de V, et on pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi_V : & X & \dashrightarrow & \mathbf{P}(V) \\ & x & \mapsto & [s_1(x) : \cdots : s_n(x)] \end{array}$$

Partie fixe et partie mobile d'un fibré en droite Soit L un fibré en droite avec au moins une section globale non nulle. Notons maintenant $F \subset \mathrm{Bs}(|L|)$ la *partie fixe* qui est définit comme étant le plus grand diviseur effectif contenu dans le lieu base de $|L|$. Ici l'expression "le plus grand diviseur effectif" est encore à prendre au sens schématique : pour tout diviseur effectif D, on a une immersion fermée $D \hookrightarrow nD$ pour $n \geq 0$.

Proposition 2.2.1. *Si L est un fibré en droite tel que $H^0(X, L) \neq 0$, alors on a les propriétés suivantes :*

1. $h^0(X, F) = 1$
2. *L'inclusion $L(-F) \hookrightarrow L$ induit un isomorphisme $H^0(X, L(-F)) \simeq H^0(X, L)$*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $h^0(X, F) > 1$. Puisque L a des sections globales non nulle, il existe $D \in |L|$.Par définition de F il existe un diviseur D' effectif sans composante irreductible commune avec F tel que $D = D' + F$. Puisque $h^0(X, F) > 1$ alors on trouve $F' \neq F$ un diviseur effectif linéairement équivalent à F, ainsi le diviseur $D' + F'$ est effectif et linéairement équivalent à $D \in |L|$ donc $D' + F' \in |L|$ or $D' + F'$ ne contient pas F dans son support ce qui est absurde par propriété de F donc cela prouve 1. Ainsi, à multiplication scalaire prés, on a une unique section $s_F \in H^0(X, F)$.

Considérons maintenant l'inclusion $L(-F) \hookrightarrow L$ donnée par la tensorisation par L de l'inclusion $\mathcal{O}_X(-F) \hookrightarrow \mathcal{O}_X$. L'inclusion $H^0(X, L(-F)) \hookrightarrow H^0(X, L)$ est un morphisme est surjectif. En effet, choisissons $s \in H^0(X, L)$ définit par $D \in |L|$ alors $D' := D - F$ est effectif et ainsi on a $D' \in |L(-F)|$ donc définit $s' \in H^0(X, L - F)$ tel que $s' \otimes s_F = s$. □

Remarque 2.2.2. Attention, je veux noter que même si $H^0(X, L(-F)) = H^0(X, L)$ alors on a pas forcément $\mathrm{Bs}(L(-F)) = \mathrm{Bs}(L)$ puisque $\mathrm{Bs}(L(-F))$ dépend de la structure du fibré en droites $L(-F)$ et pas seulement de son espace de sections globales. On a néanmoins l'inclusion $\mathrm{Bs}(L(-F)) \subseteq \mathrm{Bs}(L)$ et même $\mathrm{Bs}(L(-F)) \subseteq \mathrm{Bs}(L) \setminus F$ (dans le sens topologique).

Ainsi, dans le cas où X est une surface, $\mathrm{Bs}(L(-F))$ est composé d'un certain nombre de points x_i. Et le point 2. de la proposition précédente montre que φ_L prend les mêmes valeurs que $\varphi_{L(-F)}$. Donc on peut étendre l'application φ_L de sorte qu'elle soit définit sur le complémentaire d'un sous-schéma de dimension 0 (codimension 2 dans le cas général).

Définition 2.2.3. On obtient de cette façon une décomposition $L = F + M$ où $M = L(-F)$ est appélé la *partie mobile* de L.

Genre d'une courbe dans une surface K3 Tout d'abord, rappelons que pour une courbe C, on peut définir son genre arithmétique $p_a(C) := 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$. De plus, si la courbe C n'est pas lisse alors on peut définir le genre géométrique de C comme étant le genre de sa normalisation $\nu : \tilde{C} \to C$ c'est à dire on pose $g(C) := g(\tilde{C})$.

Avant de discuter des courbes dans les surfaces K3, voici une description du genre arithmétique des courbes (intègres) éventuellement singulière.

Proposition 2.2.4. *Pour une courbe C intègre, on a*

$$p_a(C) = g(C) + h^0(C, \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C),$$

de plus le faisceau $\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C$ est de support fini concentré sur les points singuliers de C de sorte que $p_a(C) = g(C)$ si et seulement si C est lisse.

Démonstration. Pour commencer, on a une inclusion $\mathcal{O}_C \hookrightarrow \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ qui est localement donnée par l'inclusion d'un anneau intègre dans sa cloture intégrale. En particulier, cette inclusion est un isomorphisme au voisinage de tout point lisse de C puisqu'un tel voisinage s'écrit $\mathrm{Spec}(A)$ avec A intégralement clos et donc le quotient $\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C$ est de support fini concentré sur les points singuliers de C. De plus, la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \to \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C \to 0$$

donne l'égalité $\chi(\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C)$. Mais ν est un morphisme affine donc $\chi(\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{C}})$ et $\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C$ est de support fini donc n'a pas de H^1 voir par exemple [Har77, Thm III.2.7]. Ainsi, on calcul que $p_a(C) = g(C) + h^0(C, \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C)$. □

Maintenant, si on se donne X une surface K3, alors rappelons que le théorème de Riemann-Roch pour les surfaces K3 2.1.1 est

$$\chi(L) = \frac{L^2}{2} + 2$$

pour tout fibré en droites L sur X. En particulier, si C est une courbe intègre dans X, on voit que $-h^1(C, \mathcal{O}_C) = \frac{C^2}{2} + 1$ et donc $C^2 = 2 - 2h^1(C, \mathcal{O}_C)$. Mais $p_a(C) \geq 0$ donc $C^2 \geq -2$. Notons aussi qu'en particulier L^2 est pair.

Définition 2.2.5. Une courbe C irréductible dans une surface K3 est appélé (-2)-courbe si $C^2 = -2$.

Remarque 2.2.6. Tout diviseur effectif D avec un support irréductible et étant de carré -2 est une (-2)-courbe. En effet, écrivons $D = nC$ avec C une courbe irréductible et $n \geq 1$. Alors $-2 = D^2 = n^2C^2$ mais comme -2 n'a pas de facteur carré on en déduit que $n = \pm 1$. Et comme D et C sont effectif, on a $n = 1$ et donc $D = C$.

Proposition 2.2.7. *Toute (-2)-courbe dans une surface K3 est isomorphe à* $\mathbf{P}^1$.

Démonstration. Soit C une (-2)-courbe, on a $p_a(C) = 0$ et $g(C) \leq p_a(C)$ donc $g(C) = 0$. Par conséquent, la courbe C est lisse, irréductible et de genre 0, donc $C \simeq \mathbf{P}^1$ puisque qu'on est sur un corps algébriquement clos. □

L'étude des (-2)-courbes dans une surface K3 donne beaucoup d'informations sur la géométrie de la surfaces K3. Tout au long de ce document elles joueront un rôle primordial.

Exemple 2.2.8 (de (-2)-courbes). — Si on note F_4 la quartique de Fermat dans $\mathbf{P}^3$ alors on peut montrer que toutes les droites de F_4 sont des (-2)-courbes. On peut même montrer que F_4 contient 48 (-2)-courbes données par les intersections de F_4 avec les 48 plans de la forme $x_i = \zeta x_j$ où ζ est une racine quatrième de l'unité.

Remarque 2.2.9. Il est important de remarquer que s'il existe un diviseur effectif D dont le carré est strictement négatif alors il existe une (-2)-courbe. En effet, on écrit D sous la forme $D = \sum_{i=1}^{n} n_i C_i$ où les C_i sont des courbes irréductibles et les n_i sont positifs. Mais alors $D^2 < 0$ donne que $\sum_{i,j} n_i m_j C_i \cdot C_j < 0$ or puisque les C_i, C_j ne partage pas de composante irréductible quand $i \neq j$, on a $C_i \cdot C_j \geq 0$ quand $i \neq j$. Ainsi l'une des courbes irréductibles C_i est de carré strictement négatif et donc de carré -2.

Conséquence de Riemann-Roch pour les K3

Lemme 2.2.10. *Si L est un fibré en droites sur une variété lisse tel que $h^0(X, L) \neq 0$ et $h^0(X, L^*) \neq 0$ alors $L \simeq \mathcal{O}_X$.*

Démonstration. L'hypothèse assure qu'on peut trouver D, E deux diviseurs effectifs tel que $L = \mathcal{O}_X(D)$ et $L^* = \mathcal{O}_X(E)$, ainsi $0 = D + E$ mais comme ces deux diviseurs sont effectifs alors $D = E = 0$ et donc $L \simeq \mathcal{O}_X$. □

Proposition 2.2.11. *Soit X une surface K3 et soit L un fibré en droites sur X. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Si $L^2 \geq -2$ alors $h^0(X, L) \neq 0$ ou $h^0(X, L^*) \neq 0$.*
2. *Si $L^2 \geq 0$ alors $L \simeq \mathcal{O}_X$ ou $h^0(X, L) \geq 2$ ou $h^0(X, L^*) \geq 2$.*
3. *Si $h^0(X, L) = 1$ alors toute courbe C contenu dans l'unique diviseur effectif D associé à L vérifie $C^2 \leq -2$, en particulier si C est intègre alors c'est une (-2)-courbeS.*

Démonstration.

1. On écrit $\chi(L) = \frac{L^2}{2} + 2 \geq 1$ et comme $h^2(X, L) = h^0(X, L^*)$ alors $h^0(X, L) - h^1(X, L) + h^0(X, L^*) \geq 1$. Il faut donc que $h^0(X, L)$ ou $h^0(X, L^*)$ soit non nul.
2. On écrit $\chi(L) = \frac{L^2}{2} + 2 \geq 2$ donc de même on a

$$h^0(X, L) - h^1(X, L) + h^0(X, L^*) \geq 2.$$

   Supposons que $h^0(X, L) \leq 1$ et $h^0(X, L^*) \leq 1$ alors l'inégalité de dessus assure que $h^1(X, L) = 0$ et puis alors $h^0(X, L) = h^0(X, L^*) = 1$. On utilise maintenant le lemme précédent qui dit que $L \simeq \mathcal{O}_X$.
3. Si $L = \mathcal{O}_X$ alors $D = 0$ et il n'y a pas de courbe dans D. Sinon, L est associé à un unique diviseur effectif non nul D, donc on prend $C \subset D$ un courbe non nulle, on a donc $1 \leq h^0(X, C) \leq h^0(X, D) = 1$ et ainsi $h^0(X, C) = 1$. Mais on a $h^0(X, -C) = 0$ donc ensuite Riemann-Roch donne $-h^1(X, C) = \frac{C^2}{2} + 1$ donc $C^2 = -2 - 2h^1(X, C) \leq -2$.

□

Corollaire 2.2.12 (Forme de la partie fixe). *La partie fixe F du fibré en droite L s'écrit $F = \sum a_i C_i$ où les C_i sont des (-2)-courbes.*

Démonstration. On a déjà vu que $h^0(X, F) = 1$ donc on applique le point 3. de la proposition précédente. □

2.2.2 Fibrés en droites amples et nefs

A cause du théorème suivant, on aura besoin d'introduire quelques notions de géométries Lorentzienne.

Théorème 2.2.13 (de l'indice de Hodge - [Har77, Thm V.1.9]). *Soit X une surface projective et $\rho(X)$ le rang du groupe de Néron-Sévéri. La forme quadratique de $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}}$ induit par le produit d'intersection est de signature $(1, \rho(X) - 1)$.*

Prenons un espace vectoriel $V \simeq \mathbf{R}^n$ muni d'une forme bilinéaire symétrique de signature $(1, n-1)$, alors l'ensemble $\{v \in V | v^2 > 0\}$ a deux composantes connexes. En effet, si on se donne une base de V dans laquelle la forme bilinéaire s'écrit $v^2 = v_1^2 - v_2^2 - \cdots - v_n^2$ alors la condition $v^2 > 0$ est équivalente à $v_1 > \sqrt{v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ ou $v_1 < -\sqrt{v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ et ainsi on voit que les deux composantes connexes sont données par le signe de x_1.

Proposition 2.2.14. *Les deux composantes connexes de l'ensemble des vecteurs positifs $\{v \in V | v^2 > 0\}$ sont données par le signe de l'intersection avec une classe de carré positif. Plus précisement, si $h \in V$ tel que $h^2 > 0$ alors si on note C la composante connexe de V contenant h, on a*

$$C = \{v \in V, v^2 > 0,\ v \cdot h > 0\}.$$

Ajoutons aussi que l'adhérence du C s'écrit

$$\overline{C} = \{v \in V, v^2 \geq 0,\ v \cdot h > 0\} \cup \{0\}.$$

Démonstration. Fixons $h \in V$ tel que $h^2 > 0$ et C la composante connexe contenant h de l'ensemble des vecteurs positifs. On complete la famille $(h/\sqrt{h^2})$ en une base

$$\left(\frac{h}{\sqrt{h^2}}, e_2, ..., e_n\right)$$

qui diagonalise la forme bilinéaire et dans laquelle les vecteur $v \in V$ s'écrivent $v = (v_1, ..., v_n)$.

Commençons par montrer la première égalité. Un vecteur v vérifiant $v^2 > 0$ vérifie donc $v_1 > \sqrt{v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ ou $v_1 < -\sqrt{v_2^2 + \cdots + v_n^2}$. Et le signe de v_1 détermine dans quelle composante connexe v se trouve. Or on a $h = (\sqrt{h^2}, 0, ..., 0)$ et $\sqrt{h^2} > 0$. Ainsi, h est dans la composante connexe de $\{v = (v_1, ..., v_n) \in V | v^2 > 0\}$ déterminée par la condition $v_1 > 0$. Donc, on a

$$C = \{v \in V, v^2 > 0,\ v_1 > 0\}.$$

Mais $h \cdot v = \sqrt{h^2} \cdot v_1$ donc v_1 est du même signe que $h \cdot v$. Ainsi,

$$C = \{v \in V, v^2 > 0,\ v \cdot h > 0\}.$$

Montrons maintenant la deuxième égalité, celle-ci se réécrit

$$\overline{C} \setminus \{0\} = \{v \in V, v^2 \geq 0,\ v \cdot h > 0\}.$$

Pour montrer cela, on écrit que l'ensemble $\overline{C} \setminus \{0\}$ est la composante connexe contenant h de l'ensemble

$$\overline{\{v \in V | v^2 > 0\}} \setminus \{0\} = \{v \in V | v^2 \geq 0\} \setminus \{0\}.$$

Mais une vecteur v vérifiant $v^2 \geq 0$ vérifie alors $v_1 \geq \sqrt{v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ ou $v_1 \leq -\sqrt{v_2^2 + \cdots + v_n^2}$. Mais si on suppose en plus que v est non nul alors dans aucun des cas précédents $v_1 = 0$ et donc c'est encore le signe de $v_1 = \frac{1}{\sqrt{h^2}} h \cdot v$ qui détermine à quelle composante connexe v appartient. Le même argument que précédement montre alors que

$$\overline{C} \setminus \{0\} = \{v \in V, v^2 \geq 0,\ v \cdot h > 0\}.$$

□

Définition 2.2.15. L'ensemble C sera appelé *cône positif* de V muni du vecteur positif h. En particulier, sur les surfaces projective on peut définir $\mathcal{C}_X$ comme étant le cône des fibrés en droites d'autointersections strictement positives contenant un fibré ample.

Théorème 2.2.16 (Critère d'amplitude de Nakai-Moshezon pour les classes entière - [Har77, Thm V.1.10]). *Soit X une surface projective et D un diviseur de X. Alors D est ample si et seulement si $D^2 > 0$ et $D \cdot C > 0$ pour toute courbe $C \subset X$.*

Remarque 2.2.17 ([Ven84, Coro IV.5.4]). Le critère précédent est aussi valable pour les surfaces compacte complexes non projective. C'est à dire qu'un diviseur D sur une telle surface est ample si et seulement si $c_1(D)^2 > 0$ et $c_1(D) \cdot c_1(D') > 0$ pour tout diviseur effectif D' de la surface.

Définition 2.2.18. On dit qu'un diviseur D d'une surface projective X est nef si pour toute courbe $C \subset X$, on a $D \cdot C \geq 0$.

On dira de plus qu'une classe rationnelle α de $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$ est ample (*resp.* nef) s'il existe un entier n tel que $n\alpha \in \mathrm{NS}(X)$ soit une classe entière ample (*resp.* nef). Cette terminologie permet de voir que le critère de Nakai-Moishezon admet une généralisation pour les classes rationnelles

Exemple 2.2.19 (important de fibré nef). Si L est un fibré en droite sur une surface X. On a définit plus haut la partie mobile $M := L(-F)$ du fibré L où F est sa partie fixe. Cette partie mobile M est nef. En effet, le système linéaire $|M|$ est sans partie fixe par définition, ainsi si C est une courbe de X, il existe une courbe $C' \in |M|$ sans composante irréductible commune avec C. Ainsi on a $M \cdot C = C' \cdot C \geq 0$.

Théorème 2.2.20 (Critère d'amplitude de Nakai-Moshezon pour les classes rationnelles). *Soit X une surface projective et α une classe rationnelle de $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$. Alors α est ample si et seulement si $\alpha^2 > 0$ et $\alpha \cdot C > 0$ pour toute courbe $C \subset X$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$ ample si et seulement si un multiple $n\alpha$ est ample. D'après le critère pour les classes entières l'amplitude de $n\alpha$ est équivalente au fait que $(n\alpha)^2 > 0$ et que $n\alpha \cdot C > 0$ pour toute courbe C. Sauf que les conditions $(n\alpha)^2 > 0$ et $n\alpha \cdot C > 0$ sont vérifié si et seulement si $\alpha^2 > 0$ et $\alpha \cdot C > 0$ puisque $n \geq 0$. □

On voit que tout classe ample est nef, on va essayer de voir ce qu'il se passe réciproquement.

Lemme 2.2.21. *Soit X une surface projective et $\alpha \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$ est une classe rationnelle. Alors α est nef si et seulement si c'est la limite d'une suite de classe ample. En particulier, toute classe rationnelle nef α vérifie $\alpha^2 \geq 0$.*

Démonstration. Tout d'abord, si α est une classe rationnelle telle qu'il existe une suite (α_i) de classe ample rationnelle et convergeant vers α. Alors par continuité du produit d'intersection, $\alpha^2 = \lim \alpha_i^2 \geq 0$ et de même $\alpha \cdot C = \lim \alpha_i \cdot C \geq 0$ pour toute courbe C.

Réciproquement soit α une classe rationnelle nef et on va montrer que α est une limite de classe ample. Soit H un diviseur ample et un multiple positif $D := n\alpha$ de α tel que D est un diviseur. Puisqu'un multiple positif mH de H est très ample et en particulier effectif alors $\alpha \cdot mH \geq 0$. Ainsi $D \cdot H \geq 0$. De plus $H^2 > 0$, ainsi si l'on se donne $t > 0$, on aura

$$(D + ntH)^2 = D^2 + 2tnD \cdot H + (nt)^2 H^2 > 0$$

De même, toute courbe $C \subset X$, on a $D \cdot C \geq 0$ alors si on prend un $t > 0$ assez grand, on a

$$(D + ntH) \cdot C = D \cdot C + ntH \cdot C > 0$$

puisque $H \cdot C > 0$. Ainsi pour $t > 0$ assez grand, si t est un rationnel, alors $\alpha + tH = \frac{1}{n}(D + ntH)$ est ample. Ainsi, en faisant tendre t vers 0 on trouve une suite de classes ample qui converge vers α.

On a donc prouvé qu'une classe rationnelle est nef si et seulement si elle est limite de classe rationnelle ample. Soit α est rationnelle nef alors on a (α_i) qui converge vers α et telle que les α_i sont ample. Mais comme le produit d'intersection est continu, et que $\alpha_i^2 \geq 0$ alors $\alpha^2 \geq 0$.

□

Revenons maintenant aux surfaces K3, on fixe X une telle surface.

Théorème 2.2.22 (Critère d'amplitude sur les K3 - [Huy16, Prop 2.1.4]). *Soit α une classe de $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$. Alors α est ample si et seulement si $\alpha \in \mathcal{C}_X$ et $\alpha \cdot C > 0$ pour toute (-2)-courbe C.*

Démonstration. Une classe α ample vérifie immédiatement ces conditions. Il faut donc montrer que la condition est suffisante. Donc soit $\alpha \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$ vérifiant $\alpha \in \mathcal{C}_X$ et $\alpha \cdot C > 0$ pour toute (-2)-courbe C. On veut appliquer le critère de Nakai-Moishezon 2.2.20, on sait déjà que $\alpha^2 > 0$ et que $\alpha \cdot H > 0$ pour un diviseur ample H puisque $\alpha \in \mathcal{C}_X$. D'après la proposition 2.2.14 appliquée au couple $(\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}}, \alpha)$, la composante connexe contenant α de l'ensemble des classes non nul de carré positif ou nul est

$$\mathcal{C}' := \{\beta \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}} \setminus \{0\} \mid \beta^2 \geq 0,\ \alpha \cdot \beta > 0\}.$$

Mais l'ensemble $\mathcal{P}$ des classes différentes de 0 de carré positif ou nul de $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}}$ a deux composantes connexes. De plus, les $\mathcal{C}'$ et $\overline{\mathcal{C}_X} \setminus 0$ sont deux composantes connexes de $\mathcal{P}$. Et donc puisque $\alpha \in \mathcal{C}' \cap (\overline{\mathcal{C}_X} \setminus \{0\})$, on en déduit que $\mathcal{C}' = \overline{\mathcal{C}_X} \setminus \{0\}$ c'est à dire que

$$\overline{\mathcal{C}_X} = \{\beta \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}} \mid \beta^2 \geq 0,\ \alpha \cdot \beta > 0\}.$$

En particulier, toute courbe effective C de carré positif est déjà dans $\overline{\mathcal{C}_X}$ puisque $H \cdot C > 0$. Donc on a automatiquement $\alpha \cdot C > 0$ pour de telles courbe uniquement à cause du fait que $\alpha \in \mathcal{C}_X$.

Il faut donc vérifier maintenant que α est d'intersection positive sur les courbes de carré strictement négative. Soit donc C une courbe telle que $C^2 < 0$. Il existe un nombre fini de courbes irréductibles C_i (éventuellement non réduites) telles que $C = \sum_{i=1}^{n} C_i$. Pour $1 \leq i \leq n$, la courbe C_i est soit d'autointersection positive ou nulle auquel cas $C_i \cdot \alpha > 0$ d'aprés ce qui précède, soit d'autointersection négative et alors comme on a pris C_i irréductible $C_i^2 = -2$ par Riemann-Roch 2.1.1. Mais dans ce second cas, $C_i \cdot \alpha > 0$ par notre hypothèse.

On peut donc appliquer le critère de Nakai-Moishezon et trouver que α est ample. □

Remarque 2.2.23. Dans la preuve précédente, je n'ai pas utilisé le fait que α est une classe rationnelle et cette preuve s'appliquera quand on aura définit la notion de classe réelle ample et fournira une preuve du corollaire 3.2.3.

Corollaire 2.2.24. *Soit une classe rationnelle $\alpha \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$ vérifiant $\alpha^2 \geq 0$ et $\alpha \cdot C \geq 0$ pour tout (-2)-courbe C, alors est α ou $-\alpha$ est nef.*

Démonstration. On se donne donc une classe α qui vérifie $\alpha^2 \geq 0$ et qui est d'intersection positive ou nulle sur les (-2)-courbes. Encore d'après le lemme 2.2.21, il suffit de démontrer que α est limite de classes rationnelles amples. Pour cela, on se donne H un diviseur ample sur X. Prenons, un n tel que $n\alpha$ soit une classe entière de $\mathrm{NS}(X)$. Puisque $(n\alpha)^2 \geq 0$, le théorème de Riemann-Roch 2.2.11 dit que $n\alpha$ ou $-n\alpha$ est équivalent à un diviseur effectif. Puisqu'on veut démontrer que α ou $-\alpha$ est nef alors on peut supposer que c'est $n\alpha$ qui est effectif et on en déduit que $n\alpha \cdot H > 0$ et donc $\alpha \cdot H > 0$.

Alors pour tout $t > 0$ rationnel, la classe $\alpha + tH$ est telle que

$$(\alpha + tH)^2 = \alpha^2 + 2t\alpha \cdot H + t^2 H^2 > 0$$

puisque par hypothèse $\alpha^2 \geq 0$. De plus par hypothèse, on a aussi $\alpha \cdot C \geq 0$ pour toute (-2)-courbe C donc pour une telle courbe C, on a

$$(\alpha + tH) \cdot C = \alpha \cdot C + tH \cdot C > 0.$$

Ainsi, $\alpha + tH$ est ample. Donc en faisant tendre t vers 0, on trouve que α est une limite de classe rationnelle ample et donc α est nef. □

2.2.3 Systèmes linéaires complet contenant une courbe lisse

Essayons de donner quelques propriété vérifiée par un fibré en droite L sur X une surface K3 et qui est de la forme $L = \mathcal{O}_X(C)$ où C est une courbe lisse de X. Rappelons que les courbes lisses sont classifiées sont toutes projectives et classifiées par leur genre $g := \dim H^0(C, K_C)$ où K_C est le faisceau canonique de C. Pour plus de détails sur cette classification voir [Har77, Chap IV] et pour la projectivité des surfaces de Riemann voir le cours de Benoît Stroh [Str, Chap 6].

Proposition 2.2.25. *Soit X une surface K3 non nécéssairement projective et $C \subset X$ une courbe lisse de genre g dans X. On a $C^2 = 2g - 2$ et $h^0(X, \mathcal{O}_X(C)) = g + 1$.*

Démonstration. La formule d'adjonction [Huy04, Prop 2.2.17] dit que $K_C \simeq \mathcal{O}_X(C)|_C$ puisque $K_X \simeq \mathcal{O}_X$. Mais $\deg(\mathcal{O}_X(C)|_C) = C^2$ et $\deg(K_C) = 2g-2$ par Riemann-Roch, voir [Har77, Ex IV.1.3.3]. On a donc bien $C^2 = 2g - 2$.

De plus, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(C) \to K_C \to 0$$

donne naissance à la suite exacte les sections globales :

$$0 \to \mathbf{C} \to H^0(X, \mathcal{O}_X(C)) \to H^0(X, K_C) \to 0$$

puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et donc $h^0(X, \mathcal{O}_X(C)) = g + 1$. □

Remarque 2.2.26.

— On a montré à l'instant que le morphisme

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(C)) \to H^0(C, K_C)$$

est surjectif, en fait on montre par récurrence via des inégalités issues de Riemann-Roch 2.1.1 et une suite exacte similaire que si $L = \mathcal{O}_X(C)$ alors le morphisme

$$H^0(X, L^k) \to H^0(C, K_C^k)$$

est surjectif pour tout $k > 0$, voir [Huy16, Rmq 2.2.2].

— En particulier, si X est une surface K3 qui contient une courbe C lisse de genre $g \geq 2$ alors X est projective. En effet, le fibré en droite $\mathcal{O}_X(C)$ est d'autointersection $2g - 2 > 0$ et donc par [Ven84, Thm IV.5.2] la surface X est projective.

La proposition précédente montre que le morphisme vers l'espace projectif associé au fibré $\mathcal{O}_X(C)$ est un morphisme $X \dashrightarrow \mathbf{P}^g$.

Je vais maintenant énoncé deux théorèmes décrivant le morphisme induit par un fibré en droite L suivant son autointersection. Je vais donc fixé un fibré en droite L sur X une surface K3.

Théorème 2.2.27. *Si L est un fibré en droite sans partie fixe vérifiant $L^2 > 0$ alors L est sans point base.*

Démonstration. On se ramène au cas où $|L|$ contient une courbe irréductible grâce à [Huy16, Rmq 2.3.7 ii)]. Voir ensuite Saint Donat [Sai74] pour une preuve complète dans ce cas. □

Théorème 2.2.28. *Si L est un fibré non trivial nef avec $L^2 = 0$ alors L est sans point fixe. De plus, la courbe générique de $|L|$ est mE où E est une courbe elliptique (lisse et intègre) et $m = h^0(X, L) - 1$.*

Démonstration. Voir [Huy16, Prop 2.3.10] □

2.3 Théorèmes de Torelli

Soit $f : \mathcal{X} \to S$ une famille de surface K3 dont la base est simplement connexe. Le théorème d'Ehresmann [Voi02, Prop 9.3] permet de voir que $R^2 f_* \mathbf{C} \simeq \Lambda_{\mathbf{C}} \times S$ pour Λ le réseau K3 1.3.2.

On a le lemme suivant :

Lemme 2.3.1 ([Huy16, Lem 6.2.1]). *On a une inclusion naturelle $f_* \Omega^2_{\mathcal{X}/S}$ est un sous fibré holomorphe de $\Lambda_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_S$ où $\Omega_{\mathcal{X}/S}$ est le faisceaux des 2-formes différentielles holomorphes relative.*

La propriété universelle de l'espace projectif dit donc qu'on obtient une application $S \to \mathbf{P}^{21}$. Plus explicitement, on se donne une isométrie $\varphi : H^2(X_0, \mathbf{Z}) \to \Lambda$ pour $0 \in S$, on appellera la donnée d'une telle isométrie sur X_0 *un marquage* de X_0 et on dira de X_0 qu'elle est marquée. Alors comme S est simplement connexe cela induit un marquage de toutes les fibres X_t pour $t \in S$ par Ehresmann [Voi02, Prop 9.3]. L'application vers l'espace projectif précédente s'identifie à l'application holomorphe :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P} : & S & \to & \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbf{C}}) \\ & t & \mapsto & [\varphi(H^{2,0}(X_t))] \end{array}$$

Celle-ci admet plusieurs propriétés importantes que j'énoncerai dans cette partie.

Proposition 2.3.2. *L'application $\mathcal{P}$ est à valeurs dans la quadrique $\mathcal{D} := \{[x] \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbf{C}}) \mid x \cdot x = 0, x \cdot \bar{x} > 0\}$.*

Démonstration. Il est clair que si $\alpha \in H^{2,0}(X_t)$, alors sous le marquage $\alpha \wedge \alpha$ est une forme de type $(4,0)$ qui est donc nulle puisque les fibres X_t sont de dimension 2. De plus, $\alpha \wedge \bar{\alpha}$ est une forme de type $(2,2)$ qui s'écrit localement $|f|^2 \cdot dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$ avec f une fonction complexe telle que α soit égale à $f \cdot dz_1 \wedge dz_2$ sûr une carte $U \subset X_t$. Or, un calcul montre que la forme $dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 = 4 \cdot \mathrm{Vol}(U)$. Ainsi $\alpha \wedge \bar{\alpha}$ est localement un multiple positif de la forme de volume donc $\alpha \wedge \bar{\alpha}$ est globalement un multiple positif de la forme volume. Par conséquent, on a $x \cdot \bar{x} > 0$. □

Définition 2.3.3 (Application et domaîne des périodes). On appelle $\mathcal{D}$ le domaîne des périodes des surfaces K3 et l'application $\mathcal{P}$ est l'application des périodes de la famille $\mathcal{X} \to S$.

Définition 2.3.4 (Déformation universelle). Soit une famille $\mathcal{X} \to S$ avec $0 \in S$. On dit que cette famille est la déformation universelle de $\mathcal{X}_0$ si pour toute autre famille $\mathcal{X}' \to S'$ avec un point distingué $0' \in S'$ tel que $\mathcal{X}'_{0'} \simeq \mathcal{X}_0$, il existe un unique diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{\sim} & S' \times_S \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S' & = & S' & \xrightarrow[0' \mapsto 0]{} & S \end{array}$$

Si une telle déformation universelle de $\mathcal{X}_0$ existe, alors elle est unique et on la notera $\mathcal{X} \to \mathrm{Def}(\mathcal{X}_0)$.

Pour les surfaces K3, on a le résultat suivant :

Proposition 2.3.5 ([Huy16, Coro 6.2.7 et Prop 5.2.1]).
- *Soit $\mathcal{X}_0$ une surface K3. Alors $\mathcal{X}_0$ admet une déformation universelle $\mathcal{X} \to \mathrm{Def}(X_0)$.*
- *La variété $\mathrm{Def}(X_0)$ est lisse et de dimension 20.*
- *Toutes les fibres $\mathcal{X}_t$ en t suffisament proche de 0 sont des surfaces K3 et la famille $\mathcal{X} \to \mathrm{Def}(X_0)$ est aussi leur déformation universelle.*

Théorème 2.3.6 (de Torelli local - [Huy16, Prop 6.2.8]). *L'application des périodes associée à la surface K3 marquée $(\mathcal{X}_0, \varphi)$ est $\mathcal{P} : \mathrm{Def}(\mathcal{X}_0) \to \mathcal{D}$ est bien définit localement autour de $\mathcal{X}_0$ et est un isomorphisme local.*

Le théorème précédent permet de globaliser l'application des périodes sur l'espace de module N de toutes les surfaces K3 marquées. Pour plus de détails voir [Huy16, Chap 7.2]. Ces considérations permettent de démontrer le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.3.7 (de Torelli global - [Huy16, Thm 7.5.3]). *Soit X et X' deux surfaces K3. Elles sont isomorphe si et seulement s'il existe une isométrie de Hodge $H^2(X, \mathbf{Z}) \simeq H^2(X, \mathbf{Z})$.*

Si de plus, on a une isométrie de Hodge $\psi : H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(X', \mathbf{Z})$ telle qu'il existe une forme de Kähler $\omega \in H^2(X, \mathbf{C})$ sur X pour laquelle $\psi(\omega) \in H^2(X', \mathbf{Z})$ est une forme de Kähler sur X' alors il existe un unique isomorphisme $f : X' \xrightarrow{\sim} X$ avec $f^* = \psi$.

Chapitre 3

Cônes dans l'espace des 1-cycles des K3

On aura besoin pour cette partie de quelques définitions de géométrie des cônes.

Définition 3.0.1 ([Huy16, Def 8.0.5]). Soit V un espace vectoriel réel.

- Un *cône* C est une partie de V vérifiant $\mathbf{R}_{>0} \cdot C = C$.
- Un *cône convexe* C est un cône vérifiant $x + y \in C$ pour tout éléments $x, y \in C$.
- Un *rayon* du cône C est une partie de C de la forme $\mathbf{R}_{>0} \cdot x \subset C$. Un tel rayon sera dit *extrémal* si pour tout $y, z \in C$ tels que $y + z \in \mathbf{R}_{>0} \cdot x$ alors $y, z \in \mathbf{R}_{>0} \cdot x$.
- Soit un nombre fini de vecteurs $v_1, ..., v_n \in V$, un cône de la forme $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_{\geq 0} v_i$ sera dit *polyédral engendré* par les vecteurs $v_1, ..., v_n$. De plus, dans le cas où $V = \Gamma_{\mathbf{R}}$ pour un réseau Γ, on dira qu'un cône C est *rationnellement polyédral*, si C est polyédral donné par $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_{\geq 0} v_i$ et que les $v_i \in \Gamma_{\mathbf{Q}}$.
- Plus généralement un cône C sera dit *engendré* par l'une de ses parties A si tout élément $x \in C$ est une *combinaison conique* de vecteurs $v_1, ..., v_n \in A$ c'est à dire une somme finie $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ ou encore que x est dans le cône engendré par des éléments de A.
- On dit d'un cône C qu'il est *localement polyédral en* $x \in C$ s'il existe un voisinage P de x dans C et qui est polyédral.
- On dit d'un cône C qu'il est *circulaire en* $x \in \partial C$ s'il existe un voisinage ouvert $U \subset \partial C$ de x dans le bord du cône ∂C tel qu'aucun

point $y \in U$ n'admet de voisinage polyédral P dans C.

J'énoncerai néamoins le théorème suivant :

Théorème 3.0.2 (Minkowski-Weyl [Zie94]). *Dans $\mathbf{R}^n$, un sous ensemble de la forme $D = \{x \in \mathbf{R}^n \; Ax \leq b\}$ où A est une matrice et b un vecteur, peut s'écire comme une somme $D = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_{\geq 0} v_i + \mathrm{Conv}(w_1, ..., w_m)$ où $\mathrm{Conv}(w_1, ..., w_n)$ est l'enveloppe convexe des vecteurs $w_1, ..., w_m$ et pour un nombre fini de vecteurs $v_1, ..., v_n$.*

En particulier si $b = 0$ alors D peut s'écrire seulement comme $D = \mathrm{Cone}(w_1, ..., w_m) = \sum \mathbf{R}_{\geq 0} w_i$.

On aura aussi besoin des propositions suivantes concernant les cônes circulaires :

Lemme 3.0.3. *Soit $x \in \mathbf{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un n-simplexe Δ_ε les sommets $v_1, ...v_{n+1}$ vérifient $\frac{1}{n+1} \sum_i v_i = x$ et $||x - v_i|| = \varepsilon$. En particulier, x est dans l'intérieur de Δ_ε.*

Démonstration. Pour tout $i = 1, ..., n+1$, on construit $a_i = (a_{i,1}, ..., a_{i,n})$ où les $a_{i,k}$ sont donnés par les formules :

$$a_{i,k} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}} & \text{si } i \leq k, \\ -\dfrac{k}{\sqrt{k(k+1)}} & \text{si } i = k+1, \\ 0 & \text{si } i > k+1. \end{cases}$$

On peut vérifier que $||a_i|| = 1$, que $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0$ et que les a_i forment un repère affine. On note $v_i := x + \varepsilon a_i$ et Δ_ε l'enveloppe convexe des v_i. On a maintenant

$$||x - v_i|| = \varepsilon ||a_i|| = \varepsilon$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} v_i &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon a_i \\ &= \frac{n+1}{n+1} x + \frac{\varepsilon}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i \\ &= x + 0 = x. \end{aligned}$$

On a donc trouvé un n-simplexe Δ_ε dont x est le centre. De plus, le simplexe Δ_ε est de dimension égale à celle de l'espace sous jacent et ainsi x est dans l'intérieur de Δ_ε. □

Lemme 3.0.4. *Si C un cône d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^n$ alors il est localement polyédral en tout point $x \in \mathrm{Int}(C)$ de son intérieur.*

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{Int}(C)$, alors il existe une petite boule ouvert B contenu dans C et qui contient x. Posons maintenant, $U := \mathbf{R}_{>0} \cdot B$, d'après le lemme précédent 3.0.3, on peut choisir une petit n-simplexe Δ_ε contenu dans U est dont x est son centre. Le point x est donc dans l'intérieur du cône P engendré par les sommets $v_0, ..., v_n$ de Δ_ε. Comme les v_i sont dans U et que U est convexe, on a $P \subset U \subset C$. On a donc bien trouvé un voisinage P de x dans C qui est polyédral. □

Proposition 3.0.5. *Si un cône convexe fermé d'interieur non vide $C \subset \mathbf{R}^n$ est circulaire en $x \in \partial C$ alors pour tout hyperplan H passant par x, l'intersection $H \cap \partial C$ est d'intérieur vide dans ∂C.*

Démonstration. Dans le cas contraire, on a un voisinage $U \subset H \cap \partial C$ de x dans $\partial C \cap H$. D'après le lemme 3.0.3, il existe un $(n-1)$-simplexe Δ_ε contenu dans U et qui a x est dans son intérieur relatif à U. En particulier, les sommets $v_1, ..., v_n$ de ce simplexes sont dans $\partial C \subset C$.

On prend ensuite n'importe quel vecteur $v_{n+1} \in \mathrm{Int}(C)$. Le cône P engendré par les $v_1, ..., v_{n+1}$ est contenu dans C puisque C est convexe fermé et contient x dans son intérieur relatif à C.

On a donc trouvé un voisinage polyédral de x dans C ce qui est impossible par hypothèse sur C. □

3.1 Chambres et murs

On se donne dans cette section un réseau Γ tel que l'espace vectoriel réel $V = \Gamma_{\mathbf{R}}$ est de dimension ρ et qu'on muni d'une forme quadratique $(_, _)$ de signature $(1, \rho - 1)$. On a déjà vu que l'ensemble des vecteurs qui sont de carré strictement positif forment une cône ayant deux composantes connexes. On appelle $\mathcal{C}$ l'une deux composantes connexes de ce cône. Je vais noter $\Delta = \{\delta \in \Gamma,\ \delta^2 = -2\}$

Définition 3.1.1 (Murs). On appelera mur un hyperplan de V de la forme $\delta^\perp$.

Un tel mur découpe $\mathcal{C}$ en deux parties :

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{C}, \delta \cdot x \leq 0\} \cup \{x \in \mathcal{C}, \delta \cdot x \geq 0\}.$$

On va voir que les murs de n'accumulent pas dans $\mathcal{C}$. En revanche rien ne dit qu'ils ne pourront pas s'accumuler sur le bord de $\mathcal{C}$ et ca sera parfois le cas, voir [Huy16, Ex 8.4.1].

Proposition 3.1.2 ([Huy16, Rmq 8.2.3]). *L'ensemble union des murs* $\bigcup_{\delta\in\Delta} \delta^\perp$ *est une union localement finie dans* $\mathcal{C}$.

Démonstration. On se donne $h \in \mathcal{C}$ et on veut montrer qu'il existe un voisinage de h qui n'intersecte qu'un nombre fini de murs. On peut donc diagonaliser la forme quadratique $(-,-)$ en base orthonormée en complétant $\frac{h}{\sqrt{h^2}}$. Ainsi si $x \in V$ alors on peut écrire $x = x_0 + x'$ comme la somme de $x_0 = \frac{x\cdot h}{\sqrt{h^2}}$ et de $x' \in h^\perp$. Alors, on a $x^2 = |x_0|^2 - ||x'||^2$ où l'on a muni $h^\perp$ du produit scalaire euclidien $< -,- >_{h^\perp} = -(-,-)$ dont on note $||_||_{h^\perp}$ la norme associée.

Soit $\delta \in \Delta$, alors $|\delta_0|^2 - ||\delta'||^2_{h^\perp} = -2$ et montrons que $||\delta'||_{h^\perp} \leq 2 + |\delta_0|$. Pour cela, je vais distinguer les cas $|\delta_0| + ||\delta'||_{h^\perp} \geq 1$ et $|\delta_0| + ||\delta'||_{h^\perp} < 1$.

Si $|\delta_0| + ||\delta'||_{h^\perp} \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} |\delta_0|^2 - ||\delta'||^2_{h^\perp} = -2 &\Leftrightarrow (|\delta_0| + ||\delta'||_{h^\perp})(|\delta_0| - ||\delta'||_{h^\perp}) = -2 \\ &\Leftrightarrow |\delta_0| - ||\delta'||_{h^\perp} = \frac{-2}{|\delta_0| + ||\delta'||_{h^\perp}} \end{aligned}$$

En particulier $||\delta'|| - |\delta_0| \leq 2$.

Maintenant, si $|\delta_0| + ||\delta'||_{h^\perp} < 1$ alors $|\delta_0| < 1$ donc $|\delta_0|^2 < |\delta_0|$ et puis enfin $||\delta'||_{h^\perp} = \sqrt{|\delta_0|^2 + 2} \leq |\delta_0|^2 + 2 \leq |\delta_0| + 2$. Dans chacun des deux cas, on a donc bien

$$||\delta'||_{h^\perp} \leq 2 + |\delta_0| \tag{3.1}$$

On se donne maintenant $x \in \delta^\perp$, on a donc $x \cdot \delta = 0$ c'est à dire que $x_0 \cdot \delta_0 =< x', \delta' >_{h^\perp}$ où x_0 et x' sont donnés par la décomposition en somme directe décrite précédement. Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour la norme $||_||_{h^\perp}$ dit que

$$|x_0 \cdot \delta_0| = | < x', \delta' >_{h^\perp} | \leq ||x'||_{h^\perp} \cdot ||\delta'||_{h^\perp} \leq ||x'||_{h^\perp}(|\delta_0| + 2).$$

Donc on a

$$|x_0| \cdot |\delta_0| - ||x'||_{h^\perp} \cdot |\delta_0| \leq 2||x'||_{h^\perp}. \tag{3.2}$$

Voyons donc ce qu'il se passe quand x est proche de h c'est à dire quand $||x-h||_V \leq \varepsilon$, ici $||_||_V$ est la norme euclidienne de V que l'on calcule avec une base orthonormé euclidienne complétant $\frac{h}{\sqrt{h^2}}$ et prenons $\varepsilon < \sqrt{h^2}/2$.

Alors on a

$$x - h = (x_0 - \sqrt{h^2})\frac{h}{\sqrt{h^2}} + x' \text{ donc } ||x-h||_V^2 = (x_0 - \sqrt{h^2})^2 + ||x'||_{h^\perp}^2.$$

Donc on obtient les deux inégalités $|x_0 - \sqrt{h^2}|, ||x'||_{h^\perp} \leq \varepsilon$.

En particulier $x_0 \geq \sqrt{h^2} - \varepsilon > 0$ et donc

$$|x_0| - ||x'||_{h^\perp} \geq x_0 - \varepsilon \geq \sqrt{h^2} - 2\varepsilon > 0$$

Ainsi l'inégalité du paragraphe précédent 3.2 $|\delta_0|(|x_0| - ||x'||_{h^\perp}) \leq 2||x'||_{h^\perp}$ donne $|\delta_0| \leq \frac{2||x'||_{h^\perp}}{\sqrt{h^2}-2\varepsilon} \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{h^2}-2\varepsilon}$ mais on a aussi que $||\delta'||_{h^\perp} \leq |\delta_0| + 2$ donc $||\delta'||_{h^\perp} \leq 2 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{h^2}-2\varepsilon}$.

Ainsi on peut inclure l'ensemble $\{\delta \in \Delta,\ \delta^\perp \cap \mathrm{B}(h,\varepsilon) \neq \emptyset\}$ des éléments de Δ qui génère un mur se trouvant suffisament proche de h dans le compact

$$\left\{ \delta = \delta_0 + \delta' \in V,\ |\delta_0| \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{h^2} - 2\varepsilon}, ||\delta'||_{h^\perp} \leq 2 + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{h^2} - 2\varepsilon} \right\}$$

Mais comme l'ensemble $\{\delta \in \Delta,\ \delta^\perp \cap \mathrm{B}(h,\varepsilon) \neq \emptyset\}$ est sans point d'accumulation, il est nécéssairement fini. L'ensemble union des murs est donc bien localement fini. □

Définition 3.1.3 (Chambres). On appelle chambre une composante de connexe de $C \setminus \bigcup_{\delta\in\Delta} \delta^\perp$.

Se donner une chambre C_0 est équivalent à se donner une suite $(\delta_i)_{i\in I}$ d'élément de Δ vérifiant $x \in C_0 \Leftrightarrow \forall i \in I, x \cdot \delta_i > 0$. On vérifie immédiatement qu'une chambre est un cône ouvert.

Proposition 3.1.4. *Si C_0 est une chambre alors le cône $\overline{C_0}$ est localement polyédral dans C*

Démonstration. Soit $h \in C \cap \overline{C_0}$, et on veut montrer qu'il existe un voisinage de h contenu dans $C \cap \overline{C_0}$ qui soit de la forme $\mathrm{Cone}(v_1, ..., v_n) = \sum \mathbf{R}_{\geq 0} v_i$.

La question porte sur les vecteurs x se trouvant dans le bord de la chambre $\mathcal{C}_0$ puisque pour ceux dans $\mathcal{C}_0$, on peut trouver un tel voisinage puisque $\mathcal{C}_0$ est un cône ouvert par 3.0.4.

Pour cela, on se donne B un voisinage de h n'intersectant qu'un nombre fini de murs $\delta_1^\perp, ..., \delta_n^\perp$. Comme $\delta^\perp = (-\delta^\perp)$ on peut choisir les δ_i de telle sorte que $x \in B$ vérifie $x \in \mathcal{C}_0$ si et seulement si $x \cdot \delta_i > 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Maintenant, quitte à considérer $\mathbf{R}_{>0}B$, qui n'intersecte encore qu'un nombre fini de murs, on peut supposer B est un voisinage ouvert de h qui est un cône dans $\mathcal{C}$. En particulier, on peut trouver P_1 un voisinage polyédral de h contenu dans B (ici si h est bien sur le bord de la chambre, il se peut que P_1 ne soit pas contenu entiérement dans la chambre). On utilise donc le théorème de Minkowski-Weyl qui nous donne que l'ensemble P_2 des $x \in V$ tel que $x \cdot \delta_i \geq 0$ pour chaque i est polyédral et contient h. Ainsi, $P_1 \cap P_2$ est un voisinage polyédral de h contenu dans $\mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{C}_0}$. □

Je désigne par $\mathrm{O}^+(\Gamma_{\mathbf{R}})$ le groupe des isométries de V qui préservent $\mathcal{C}$ et $\mathrm{O}^+(\Gamma) := \mathrm{O}^+(\Gamma_{\mathbf{R}}) \cap \mathrm{O}(\Gamma)$.

Définition 3.1.5 (Groupe de Weyl). On note $W(\Gamma)$ le sous groupe du groupe orthogonal $\mathrm{O}^+(\Gamma)$ engendré par les reflexion par rapport aux murs $s_\delta : x \mapsto x + (x \cdot \delta)\delta$ pour $\delta \in \Delta$.

Proposition 3.1.6 ([Deb19], [Huy16]). *Le groupe de Weyl $W(\Gamma)$:*

1. *est distingué dans $\mathrm{O}^+(\Gamma)$.*
2. *agit sur l'ensemble des murs, et donc sur les chambres.*

Démonstration. Pour 1, soit $g \in \mathrm{O}^+(\Gamma)$ et $\delta \in \Delta$, alors

$$\begin{aligned} g \circ s_\delta \circ g^{-1}(x) &= g(g^{-1}(x) + (g^{-1}(x) \cdot \delta)\delta) \\ &= x + (g^{-1}(x) \cdot \delta)g(\delta) \\ &= x + (x \cdot g(\delta))g(\delta) \quad \text{puisque } g \text{ est une isométrie.} \\ &= s_{g(\delta)}(x) \quad \text{puisque } g(\delta) \in \Delta \end{aligned}$$

Donc $g \circ s_\delta \circ g^{-1}(x) = s_{g(\delta)}$ est dans $W(\Gamma)$ et donc comme $W(\Gamma)$ est engendré par les s_δ alors $W(\Gamma)$ est distingué dans $\mathrm{O}^+(\Gamma)$.

Pour 2, on se donne $\delta, \delta' \in \Delta$ et on voit que si $x \in \delta^\perp$ alors on a que $s_\delta(x) = x$ et que donc un calcul immédiat donne $(s_{\delta'}(x) \cdot s_{\delta'}(\delta)) = 0$. Donc $s_{\delta'}(\delta^\perp) = s_{\delta'}(\delta)^\perp$ et donc $W(\Gamma)$ agit sur les murs.

□

Proposition 3.1.7. *Le groupe de Weyl W agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres.*

Démonstration. La démonstration n'est pas difficile et se trouve par exemple dans [Huy16, Prop 8.2.6]. □

3.2 Les cônes ample, nef et kählerien

3.2.1 Cônes ample et nef d'une K3 projective

On rappelle que le groupe de Néron-Sévéri $\mathrm{NS}(X)$ d'une surface K3 est un réseau de signature $(1, \rho - 1)$ et donc la discussion précédente s'applique quand on choisit pour cône positif $C = C_X$ la composante connexe de l'ensemble des classes de carré strictement positif contenant une classe de fibré ample. Je note aussi $V := \mathrm{NS}(X)$.

On note $\mathrm{Amp}(X)$, $\mathrm{NE}(X)$ le *cône ample* et *cône effectifs* les cônes engendrés par respectivement les classes de fibrés en droites amples et les diviseurs effectifs. Ce sont tous les deux des cônes de $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}}$.

On note aussi $\mathrm{Nef}(X)$ le cône formé des classes $\alpha \in V$ telle que $\alpha \cdot \beta \geq 0$ pour toute autre classe β de diviseur effectif.

Proposition 3.2.1 (Critère d'amplitude [Huy16, Thm 8.1.2]). *Soit X une surface K3 projective. Une classe α est dans le cône ample si et seulement si $\alpha^2 > 0$ et $\alpha \cdot \beta > 0$ pour toute autre classe β de fibré effectif.*

Enfin, la preuve que je vais donner est spécifique aux surfaces K3 projective mais ce théorème est vrai pour une surface complexe X quelconque non nécéssairement projective voir par ex : [Ven84, Coro IV.5.4] !

Démonstration. Soit $\alpha \in C$ qui est strictement positive sur chaque courbe, on peut choisir des voisinages rationnellement polyédraux $\sum \mathbf{R}_{\geq 0} v_i$ (c'est à dire que les v_i qui sont en nombres finis sont dans $\Gamma_{\mathbb{Q}}$) aussi proche que l'on ne le souhaite de α. Donc ces classes v_i sont amples si et seulement si elles sont positives sur les courbes de carré -2.

Supposons qu'il n'existe pas de tel voisinage avec des v_i amples alors on aurait une suite (v_k) de classes rationnelles et une suite de (-2)-courbes (C_k) telles que $v_k \cdot C_k = 0$ et que $\mathbf{R}_{\geq 0} v_k \to \mathbf{R}_{\geq 0} \alpha$. Mais dans ce cas les murs $C_k^{\perp}$ s'accumuleraient autour de α ce qui est impossible d'après la section précédente. Donc le voisinage voulu existe est donc $\alpha \in \mathrm{Amp}(X)$. Le sens

inverse est clair puisque α est une combinaison linéaire à coefficients positifs de classes amples. □

Proposition 3.2.2. *Le cône ample d'une surface K3 projective X est un ouvert et on a*

$$\mathrm{Amp}(X) = \mathrm{Int}(\mathrm{Nef}(X)) \subset \overline{\mathrm{Amp}(X)} = \mathrm{Nef}(X)$$

Démonstration. On a déjà vu l'inégalité de droite il suffit donc de prouver que $\mathrm{Amp}(X)$ c'est l'intérieur de $\mathrm{Nef}(X)$. La preuve précédente montre que $\mathrm{Amp}(X)$ est un ouvert puisqu'on a trouver un voisinage dans le cone ample d'une classe ample arbitraire.

On a donc $\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Nef}(X))$, il reste à montrer que $\mathrm{Int}(\mathrm{Nef}(X)) \subset \mathrm{Amp}(X)$. Soit $\alpha \in \mathrm{Int}(\mathrm{Nef}(X))$ et H une classe ample, alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la classe $\alpha_\varepsilon := \alpha - \varepsilon H$ est encore dans $\mathrm{Int}(\mathrm{Nef}(X))$ donc $\alpha = \alpha_\varepsilon + \varepsilon H$ donc $\alpha^2 > 0$ et $\alpha \cdot C > 0$ pour toute courbe C donc $\alpha \in \mathrm{Amp}(X)$. □

Corollaire 3.2.3. *Le cône ample et le cône nef d'une surface K3 projective X peuvent être décrit de la façon suivante :*

$$\mathrm{Amp}(X) = \{\alpha \in C_X,\ \alpha \cdot C > 0 \textit{ pour tout (-2)-courbe } C \simeq \mathbf{P}^1\}$$
$$\mathrm{Nef}(X) = \{\alpha \in \overline{C_X},\ \alpha \cdot C \geq 0 \textit{ pour tout (-2)-courbe } C \simeq \mathbf{P}^1\}$$

Démonstration. Pour la description du cône ample le même argument que pour la preuve du critère 2.2.22 d'amplitude des classes rationnelles fonctionne.

On veut maintenant montrer que

$$\mathrm{Nef}(X) = \{\alpha \in \overline{C_X},\ \alpha \cdot C \geq 0 \text{ pour tout (-2)-courbe } C \simeq \mathbf{P}^1\}.$$

Tout d'abord, par définition le cône $\mathrm{Nef}(X)$ est inclus dans

$$\{\alpha \in \overline{C_X},\ \alpha \cdot C \geq 0 \text{ pour tout (-2)-courbe } C \simeq \mathbf{P}^1\}.$$

Réciproquement soit α est une classe de l'ensemble de droite et une classe ample H. Maintenant, on voit que pour $t > 0$

$$(\alpha + tH)^2 = \alpha^2 + 2t\alpha \cdot H + t^2 H^2 > 0.$$

De plus par hypothèse $\alpha \cdot C \geq 0$ pour toute (-2)-courbe C et donc pour une telle courbe on a

$$(\alpha + tH) \cdot C = \alpha \cdot C + tH \cdot C > 0.$$

Donc d'après la première égalité, $\alpha + tH$ est ample et donc en faisant tendre t vers 0, on montre que α est limite de classe ample. Ainsi, α est nef.

□

Le corollaire précédent permet de voir que $\mathrm{Amp}(X)$ est une chambre de $\mathcal{C}_X$.

Remarque 3.2.4 (Chaque mur est important ! - [Huy16] Rmk. 8.2.8).

— Notons que si C est une courbe de carré -2 alors il existe une classe de $C^\perp$ dans $\mathcal{C}_X$. En effet, puisque la forme quadratique de $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}}$ est de signature $(1, \rho(X))$, l'orthogonal $C^\perp$ posssède nécéssairement une classe α de carré $\alpha^2 > 0$ et donc α ou $-\alpha$ se trouve dans l'intérieur de $\mathcal{C}_X$. Ainsi aucun mur de $\mathcal{C}_X$ ne peut être completement contenu dans $\partial\mathcal{C}_X$. Par conséquent, l'existence d'une (-2)-courbe assure l'existence de classes de $\mathcal{C}_X$ non amples.

— De plus, chaque mur définit une face de codimension 1 de $\mathrm{Amp}(X)$. En effet, pour toute classe H de fibré ample, alors

$$x := H + \frac{1}{2}(H \cdot C)C$$

est dans le mur $C^\perp$ et vérifie

$$x \cdot C' = H \cdot C' + \frac{1}{2}(H \cdot C)C \cdot C' > 0$$

pour toutes courbes C' de carré -2 et différente de C. Et

$$x^2 = H^2 + (H \cdot C)^2 - \frac{1}{2}(H \cdot C)^2 = H^2 + \frac{1}{2}(H \cdot C)^2 > 0$$

donc x est dans le cône nef *ie* au bord du cone ample, dans le mur $C^\perp$ mais dans aucun autre mur. Donc $C^\perp$ est une face de codimension 1 de $\mathrm{Amp}(X)$.

Remarque 3.2.5 (sur les K3 elliptiques - [Huy16, Rmk. 8.2.13]). On va montrer la propriété suivante : une surface K3 est elliptique si et seulement si il existe une classe rationnelle L de fibré en droites de carré $L^2 = 0$.

Si X est elliptique alors la classe d'une fibre est de carré 0. Réciproquement, si α est une classe rationnelle tel que $\alpha^2 = 0$, alors quitte à remplacer α par un multiple, on peut supposer que $[L] := \alpha$ est entier et donc une classe de fibré.

Par Riemann-Roch 2.2.11, L ou L^* est admet des sections globales non nulles donc quitte échanger L et L^*, on peut supposer qu'il s'agit de L et donc $[L] \in \overline{\mathcal{C}_X}$.

Il faut donc montrer maintenant que L est nef car on a vu qu'un fibré nef d'intersection 0 induit une fibration elliptique 2.2.28. On pourrait imaginer que comme le groupe de Weyl agit transitivement sur les chambres, alors on doit prendre un élément de W qui envoie L dans le cône nef mais a priori on ne garantit pas que l'image soit encore de carré 0. Pour celà, on fixe une classe ample H.

Si L est nef alors on a fini, sinon il existe une courbe C telle que $L \cdot C < 0$. La classe symétrique de L par rapport au mur définit par C est

$$s_C(L) := L + (L \cdot C)C$$

et est encore dans $\partial\overline{\mathcal{C}_X}$. De plus l'application $s_C : \alpha \mapsto \alpha + (\alpha \cdot C)C$ est une involution linéaire. Ainsi puisque $L \neq 0$, on a $s_C(L) \neq 0$. On a donc

$$0 < s_C(L) \cdot H = (L \cdot H) + (L \cdot C)(C \cdot H) < L \cdot H.$$

Donc si $s_C(L)$ n'est pas nef alors on peut recommencer le processus avec $s_C(L)$ à la place de L et ainsi de suite. Comme les classes $s_C(L)$ sont effectives et que l'intersection avec H est strictement décroissante et strictement positive, ce processus doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes. On trouve donc une classe L' entière qui est nef et de carré 0.

3.2.2 Cône de Kähler

On va maintenant donner une description du cône de Kähler $\mathcal{K}_X$ dans $H^{1,1}(X)_{\mathbf{R}}$ d'une surface K3. Le théorème suivant admet une démonstration via le théorème de Torelli global que l'on pourra trouver dans [Huy16, Thm 8.5.2] ou dans [seminK3, Exp X Thm 2]. Néanmoins, depuis 2004, Demailly et Paun ont étendu l'analogie entre fibré ample et forme de Kähler en donnant une description du cône de Kähler pour les variétés kähleriennes compactes quelconques dans [DP04].

Théorème 3.2.6 (Demailly-Paun [DP04]). *Si (X, ω) est une variété kählerienne compacte alors le cône de Kähler $\mathcal{K}_X$ est la composante connexe contenant ω de l'ensemble $\mathcal{P}_X$ des classes $\alpha \in H^{1,1}(X)_{\mathbf{R}}$ telles que $\int_Y \alpha^p > 0$ pour toute sous variété analytique irréductible $Y \subset X$ de dimension p.*

Dans le cas d'une surface K3 non projective X, on appelle $\mathcal{C}_X \subset H^{1,1}(X)_{\mathbf{R}}$ la composante connexe contenant ω des classes de carré positif. Alors les classes de formes de Kähler sont les classes dans $\mathcal{C}_X$ qui sont positives sur toutes les courbes analytiques $C \subset X$ irréductibles. Donc en recopiant la preuve 2.2.22, puisque $H^{1,1}(X)_{\mathbf{R}}$ est un espace vectoriel muni d'une forme quadratique de signature (1,19), on montre que

$$\mathcal{K}_X = \{\alpha \in \mathcal{C}_X, \alpha \cdot C > 0 \text{ pour toute (-2)-courbe } \mathbf{P}^1 \simeq C \subset X\}.$$

3.3 Le cône positif et le cône de Mori

Le but de cette partie sera d'étudier le cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ d'une surface K3 projective X. On verra un théorème de Kovács [Kov94] décrivant les structures possibles de ce cône. Rappelons que le cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est l'adhérence du cône effectif $\mathrm{NE}(X)$ engendré par les classes de diviseurs effectifs de $\mathrm{NS}(X)$.

Tout d'abord, pour comprendre la géométrie du cône positif $\mathcal{C}_X$, on aura besoin du lemme :

Lemme 3.3.1. *La variété $\partial\overline{\mathcal{C}_X} \cup (-\partial\overline{\mathcal{C}_X})$ est une variété algébrique irréductible si et seulement si $\rho(X) \neq 2$.*

Démonstration. Tout d'abord, la variété $V := \partial\overline{\mathcal{C}_X} \cup (-\partial\overline{\mathcal{C}_X})$ n'est autre que la variété de $\mathbf{A}^{\rho(X)}_{\mathbf{R}}$ donnée par

$$x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{\rho(X)}^2 = 0$$

Donc pour $\rho(X) = 1$, $V = \mathbf{A}^1_{\mathbf{R}}$ qui est irréductible, et pour $\rho(X) = 2$, la variété V est l'union de la droite $y = x$ avec la droite $y = -x$.x

Maintenant pour $\rho(X) \geq 3$, on veut montrer que le polynôme $x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{\rho(X)}^2$ est irréductible dans $\mathbf{R}[x_1, ..., x_{\rho(X)}]$. Pour cela, il suffit de voir que la forme quadratique $q(x) = x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{\rho(X)}^2$ n'est pas le produit de deux formes linéaires. La preuve suivante est aussi vraie sur tout corps de caractéristique $\neq 2$.

Si ce n'était pas le cas, il existerait deux polynômes homogènes de degrès 1 $P = \sum_{i=1}^n a_i x_i, Q = \sum_{i=1}^n b_i x_i$ tels que $q(x) = PQ$ c'est à dire que

$$x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{\rho(X)}^2 = \sum_{i,j} a_i b_j x_i x_j.$$

On peut vérifier que la matrice symétrique associée à la forme quadratique $\sum_{i,j} a_i b_j x_i x_j$ est la matrice

$$\frac{ab^T + ba^T}{2}$$

où a et b sont les vecteurs $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)$ écrit en colonnes. Cette matrice est de rang au plus 2 puisque son image est contenu dans $\mathbf{R}a + \mathbf{R}b$. Or la matrice symétrique associée à $q(x)$ est de rang n donc q n'est pas le produit de deux formes linéaires et $x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{\rho(X)}^2$ est irréductible. □

On peut maintenant décrire la géométrie du cône positif :

Proposition 3.3.2. *Le bord du cône positif $\overline{\mathcal{C}_X}$ d'une surface K3 projective X ayant un rang de Picard $\rho(X) \geq 3$ est circulaire. C'est à dire que pour toute classe $\alpha \in \partial\overline{\mathcal{C}_X}$ et tout voisinage $U \subset \partial\overline{\mathcal{C}_X}$ de α dans le bord $\partial\overline{\mathcal{C}_X}$, alors aucun $\beta \in U$ n'admet de voisinage polyédral $P = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{\geq 0} v_i$ dans $\overline{\mathcal{C}_X}$.*

Démonstration. Supposons le contraire, on a un polyédre d'intérieur relatif à $\overline{\mathcal{C}_X}$ non vide

$$P = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_{\geq 0} v_i \subset \overline{\mathcal{C}_X}$$

qui contient dans son intérieur des points de $\partial\overline{\mathcal{C}_X}$. Si l'intérieur de P relatif à l'espace ambiant contient des points de $\partial\overline{\mathcal{C}_X}$ alors $P \not\subset \overline{\mathcal{C}_X}$ mais c'est impossible. Donc les points de $\partial\overline{\mathcal{C}_X}$ qui sont dans l'intérieur de P relatif à $\overline{\mathcal{C}_X}$ sont sur une face F de P. Soit $H := \mathbf{R} \cdot F$, c'est un hyperplan de $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}}$. Ce dernier intersecte $\partial\overline{\mathcal{C}_X}$ et $H \cap \partial\overline{\mathcal{C}_X}$ est de codimension 0 dans $\partial\overline{\mathcal{C}_X}$ donc de codimension 1 dans $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}}$.

De plus, la variété agébrique $\partial\overline{\mathcal{C}_X} \cup (-\partial\overline{\mathcal{C}_X})$ est irréductible quand $\rho(X) \geq 3$ d'après la proposition précédente.

On obtient donc une contradiction car l'intersection de tout hyperplan de l'espace affine avec une variété irreductible de codimension 1 distincte de l'hyperplan en question est de codimension au moins 1 dans l'hyperplan et donc de codimension au moins 2 dans l'espace affine $\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}}$.

□

Essayons maintenant de comprendre la structure du cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. La proposition suivante sera raffinée après avoir démontrer le théorème de

Kovács 3.4.4. Ce théorème classifie les différentes structures possibles du cône de Mori. Dans un cas général on peut quand même affirmer que :

Proposition 3.3.3. *Le cône de Mori* $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ *d'une surface K3 projective* X *peut être décris de la manière suivante :*

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathcal{C}_X} + \overline{\sum_{C \simeq \mathbf{P}^1} \mathbf{R}_{\geq 0} C}$$

Démonstration. Le théorème [Kol95, Thm II.4.13] dit que

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathcal{C}_X} + \overline{\sum_{C} \mathbf{R}_{\geq 0} C}$$

où la somme est indéxée par les courbes irréductibles C telles que $C^2 < 0$. Mais dans le cas des surfaces K3, le théorème Riemann-Roch 2.1.1 dit qu'une telle courbe est nécéssairement une (-2)-courbe $C \simeq \mathbf{P}^1$. On obtient donc bien

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathcal{C}_X} + \overline{\sum_{C \simeq \mathbf{P}^1} \mathbf{R}_{\geq 0} C}.$$

□

Tout l'enjeu du théorème de Kovács sera de comparer les termes

$$\overline{\mathcal{C}_X} \text{ et } \overline{\sum_{C \simeq \mathbf{P}^1} \mathbf{R}_{\geq 0} C}$$

pour donner une description plus précise du cône de Mori.

Lemme 3.3.4 ([Huy16]). *Si* H *est un de diviseur ample sur une surface K3* X *alors pour tout entier* $N \geq 0$ *l'ensemble des (-2)-courbes* C *de* X *telles que* $H \cdot C \leq N$ *est fini.*

Démonstration. On va montrer que pour tout N, il existe un nombre fini de classes de (-2)-courbes $\mathbf{P}^1 \simeq C$ vérifiant $H \cdot C = N$.
Si on complète $(\frac{H}{\sqrt{H^2}})$ en une base qui diagonalise la forme d'intersection, alors toute classe $\beta \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}}$ s'écrit $\beta = (\beta \cdot \frac{H}{\sqrt{H^2}}, \beta_2, ..., \beta_\rho)$ donc si β est telle que $\beta \cdot H = N$, on a

$$\beta = (\frac{N}{\sqrt{H^2}}, \beta_2, ..., \beta_\rho).$$

Si en plus β est de carré -2 alors on a $\beta_2^2 + ... + \beta_\rho^2 = \frac{N^2}{H^2} + 2$. Mais cette égalité est l'équation d'un compact K de $\mathbf{R}^\rho$. Mais l'ensemble des classes de (-2)-courbes vérifiant $C \cdot H = N$ est un sous ensemble de $\mathrm{NS}(X)$ donc il est sans point d'accumulation. Ainsi, l'ensemble des classes de (-2)-courbes C avec $C \cdot H = N$ est un ensemble sans point d'accumulation contenu dans le compact K donc il est fini.

Par conséquent, comme $H \cdot C$ est entier, l'ensemble des classes de (-2)-courbe C vérifiant $H \cdot C \leq N$ est réunion finie des ensembles des classes de (-2)-courbe C vérifiant $H \cdot C = n$ pour $n \leq N$ et est donc lui même fini.

□

On déduit de ce lemme la proposition suivante qui donne un premier résultat sur la structure du cône de Mori.

Proposition 3.3.5 ([Huy16]). *Le cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ d'une surface K3 projective X est localement polyédral en dehors de l'adhérence du cône positif $\overline{C_X}$. Autrement dit, pour tout $x \in \overline{\mathrm{NE}}(X) \setminus \overline{C_X}$, il existe un voisinage de x de la forme $x \in \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{\geq 0} v_i \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$.*

Démonstration. Soit $x \in \overline{\mathrm{NE}}(X) \setminus \overline{C_X}$ et soit H une classe de fibré ample. En particulier, pour k assez grand, $(x \cdot H)^2 < -kx^2$. Notons donc

$$P := \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap \{y \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}},\ (y \cdot H)^2 \leq -ky^2\},$$

c'est un cône qui contient x dans son intérieur et montrons que c'est un polyédre. Remarquons que P n'intersecte pas $\overline{C_X}$.

On sait que P est un cône fermé convexe, il est donc engendré par l'ensemble de ses rayons extrémaux [Roc70, Thm 18.5]. Au lieu de prendre l'ensemble des rayons extrémaux de P, on choisit plutôt de chercher l'ensemble des rayons enxtrémaux de P engendrés par des classes rationnelle puis de prendre l'adhérence du cône engendré par des tels rayons, plus précisement, on peut écrire

$$P = \overline{\sum_{\substack{v \in P \\ \text{extrémal rationnel}}} \mathbf{R} \cdot v}$$

On va donc dans un premier temps chercher les rayons extrémaux rationnels de P.

Soit $\mathbf{R} \cdot [C]$ un rayon engendré par une (-2)-classe $[C]$ appartenant à P. On sait d'après 3.3.3 que C est une classe extrémale de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ et donc a fortiori c'est une classe extrémale de P et le rayon $\mathbf{R} \cdot [C]$ est extrémal au cône P.

A l'inverse, soit $\mathbf{R} \cdot v$ un rayon extrémal de P avec v une classe extrémale rationnelle de P. Supposons quitte à prendre un multiple positif de v que v est une classe entière représentée par une courbe $C \subset X$. Puisque $[C] \in P$, on a $C^2 < 0$ mais alors par Riemann-Roch 2.1.1, on a $C^2 = -2$.

On a donc montrer que les rayons extrémaux de P sont tous engendrés par des (-2)-classes appartenant à P. Or d'après le lemme précédent, les (-2)-classes $[C]$ vérifiant $H \cdot C \leq \sqrt{-kC^2} \leq \left\lceil \sqrt{-kC^2} \right\rceil$ est fini, ici $\lceil _ \rceil$ est la fonction partie entière supérieure. Donc, on a

$$\overline{\sum_{\substack{v \in P \\ \text{extrémal rationnel}}} \mathbf{R} \cdot v} = \sum_{\substack{v \in P \\ \text{extrémal rationnel}}} \mathbf{R} \cdot v$$

puisque la somme est fini et ainsi on a bien :

$$P = \sum_{\substack{v \in P \\ \text{extrémal rationnel}}} \mathbf{R} \cdot v.$$

Ce qui montre que P est polyédral. □

Pour ce qui suit nous aurons besoin du lemme général suivant :

Lemme 3.3.6. *Si V est un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une forme quadratique de signature $(1, n-1)$ et soit C l'un des deux cônes positif 2.2.14 de V. Si $\alpha \in \partial C$ alors $\alpha^\perp \cap \overline{C} = \mathbf{R}_{\geq 0}\alpha$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \partial C$, en particulier $\alpha^2 = 0$. Prenons $\beta \in V$ tel que $\alpha \cdot \beta \neq 0$ et quitte à prendre un multiple de β, on peut supposer que $\alpha \cdot \beta = 1$. Mais alors la somme directe $U := \mathbf{R} \cdot \alpha \oplus \mathbf{R} \cdot \beta$ est un espace vectoriel muni de la forme quadratique induite de V qui a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la forme quadratique de U est de signature (1,1). Décomposons V en somme directe orthogonale $V = U \oplus W$ où d'après ce qu'il précède W est muni de la forme quadratique induite de V qui est de signature $(0, n-2)$.

Considérons maintenant l'orthogonal $\alpha^\perp$, celui-ci contient α et ne contient pas β, par conséquent, on peut écrire

$$\alpha^\perp = \mathbf{R} \cdot \alpha \oplus W.$$

Soit $\gamma \in \alpha^\perp$ et écrivons ce vecteur comme une somme $\gamma = a\alpha + \omega$ où $a \in \mathbf{R}$ et $\omega \in W$. On a alors $\gamma^2 = \omega^2$. On sait de plus que la forme quadratique de W est définie négative donc $\gamma^2 \leq 0$ et on a $\gamma^2 = 0$ si et seulement si $\omega = 0$. On en déduit donc que $\alpha^\perp \cap \overline{C} = \mathbf{R}_{\geq 0}\alpha$. □

Essayons de voir ce qu'il se passe quand on a un fibré de carré nul. On peut supposer qu'un tel fibré L de carré nul est effectif puisque Riemann-Roch affirme que pour un tel fibré L ou L^* l'est.

Lemme 3.3.7 ([Huy16]). *S'il existe une classe entière sur le bord $\partial\mathcal{C}_X$ c'est à dire que $\mathrm{NS}(X) \cap \partial\mathcal{C}_X \neq 0$, alors $\mathrm{NS}(X)_\mathbf{Q} \cap \partial\mathcal{C}_X$ est dense dans $\partial\mathcal{C}_X$.*

Démonstration. On se donne $\beta \in \mathrm{NS}(X)$ de carré nul et on pose la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_\beta : & \mathcal{C}_X & \to & \partial\mathcal{C}_X \\ & \alpha & \mapsto & 2(\alpha \cdot \beta)\alpha - \alpha^2 \cdot \beta \end{array}$$

Pour voir qu'elle est bien définie, on calcule rapidement que $f(\alpha)^2 = 0$ et maintenant $f_\beta(\alpha)$ ou $-f_\beta(\alpha)$ est dans $\partial\mathcal{C}_X$. Or $f_\beta(\alpha) \cdot \alpha = \alpha^2 \cdot (\alpha \cdot \beta) \geq 0$ puisque $\alpha^2, \alpha \cdot \beta \geq 0$ et ainsi d'après 2.2.14, la classe $f_\beta(\alpha)$ se trouve dans $\partial\mathcal{C}_X$.

Notons que si $\gamma \in \mathrm{Im}(f_\beta)$ est d'antécédant α alors $f_\beta(\sqrt{t}\alpha) = t \cdot \gamma$ pour tout $t \geq 0$ et donc $\mathbf{R}_{\geq 0}\gamma \subset \mathrm{Im}(f_\beta)$. Ainsi il suffit de voir que $\mathbf{R}_{>0}\gamma \cap \mathrm{Im}(f_\beta) \neq 0$ pour montrer que $\gamma \in \mathrm{Im}(f_\beta)$.

Soit $\gamma \in \partial\mathcal{C}_X$ avec $\gamma \cdot \beta \neq 0$ alors $f_\beta(\gamma + \beta) = 2(\gamma \cdot \beta)\gamma \in \mathbf{R}_{>0}\gamma$. Par ailleurs, $\beta^\perp \cap \partial\mathcal{C}_X = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot \beta$ d'après 3.3.6. Ainsi $\mathrm{Im}(f_\beta) = \partial\mathcal{C}_X \setminus \mathbf{R}_{>0}\beta$ et est dense dans $\partial\mathcal{C}_X$.

De plus, f_β est continue et $\mathrm{NS}(X)_\mathbf{Q} \cap \mathcal{C}_X$ est dense dans $\mathcal{C}_X$, ainsi l'ensemble $f_\beta(\mathrm{NS}(X)_\mathbf{Q} \cap \mathcal{C}_X)$ est dense dans $\partial\mathcal{C}_X$. Mais puisque pour toute classe $\alpha \in \mathrm{NS}(X)_\mathbf{Q} \cap \mathcal{C}_X$, on a $f_\beta(\alpha) \in \mathrm{NS}(X)_\mathbf{Q} \cap \partial\mathcal{C}_X$, on en déduit que $\mathrm{NS}(X)_\mathbf{Q} \cap \partial\mathcal{C}_X$ est dense dans $\partial\mathcal{C}_X$. □

De manière analogue, on peut énoncer aussi le lemme suivant :

Lemme 3.3.8. *Soit une classe entière $\beta \in \mathrm{NE}(X)$ de carré -2. Alors pour toute classe entière $\alpha \in \mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X)$, il existe une classe effective entière $\gamma \in \mathrm{NS}(X)$ de carré -2 ou 0 telle que α soit dans le cône engendré par β et γ (on dira que γ est à l'opposé de β par rapport à α).*

Démonstration. Soit une classe entière $\alpha \in \mathrm{NS}(X) \cap \mathcal{C}_X$, puisque la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -\alpha \cdot \beta & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, alors tout élément $\gamma \in \mathbf{R} \cdot \alpha \oplus \mathbf{R} \cdot \beta$ s'écrit de manière unique

$$\gamma = 2x \cdot \alpha - (y - (\alpha \cdot \beta)x) \cdot \beta$$

pour des $x, y \in \mathbf{R}$. On a $\gamma^2 = 2(x^2(2\alpha^2 + (\alpha \cdot \beta)^2) - y^2)$.

Nous allons montrer qu'un tel γ vérifie soit $\gamma^2 = 0$ soit $\gamma^2 = -2$. Essayons de résoudre les équations $\gamma^2 = 0$ et $\gamma^2 = -2$ d'inconnus $x, y \in \mathbf{Z} \setminus 0$ de sorte que la classe γ soit entière et non triviale. Nous verrons ensutie que l'on peut choisir des solutions x, y telles que γ soit effective.

Commençons par $\gamma^2 = 0$: cette équation admet des solutions $x, y \in \mathbf{Z} \setminus 0$ si et seulement si $2\alpha^2 + (\alpha \cdot \beta)^2$ est un carré dans $\mathbf{Q}$. Dans le cas où cette condition est vérifiée alors $y = \pm\sqrt{2\alpha^2 + (\alpha \cdot \beta)^2}x$. On gardera seulement une solution où $x, y > 0$. Remarquons que sous ces conditions on a alors $y > (\alpha \cdot \beta)x$ a cause du fait que $\alpha^2 > 0$.

Maintenant essayons de résoudre $\gamma^2 = -2$. Résoudre l'équation $\gamma^2 = -2$ c'est résoudre l'équation de Pell :

$$x^2(2\alpha^2 + (\alpha \cdot \beta)^2) - y^2 = -1$$

qui a une infinité de solutions dans $\mathbf{Z}$ quand $2\alpha^2 + (\alpha \cdot \beta)^2$ n'est pas un carré dans $\mathbf{Z}$. En effet, posons $d := 2\alpha^2 + (\alpha \cdot \beta)^2$ et supposons que d n'est pas un carré. Si d a des facteurs carrés alors je note d' le plus grand entier positif divisant d et étant sans facteur carré et on se réduit à l'équation $x'^2 d' - y^2 = -1$ où $x' = x\sqrt{d/d'}$, cette réduction permet de supposer que d est sans facteur carré. Ainsi les solutions de $dx^2 - y^2 = -1$ correspondent aux unités de l'anneau des entiers du corps de nombre $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ par [Sam67, Chap IV.6]. Comme $\alpha^2 > 0$ on a $d > 0$ et donc le corps de nombre $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ est quadratique réel. Mais le groupe des inversibles de l'anneau des entiers d'un corps de nombre quadratique réel est isomorphe à $\{\pm 1\} \times \mathbf{Z}$ d'après le théorème des unités de Dirichlet [Sam67, Chap IV.6]. On trouve donc une infinité de solution x, y.

Remarquons que si (x, y) est une solution de l'équation de Pell ci-dessus alors les couples $(-x, y), (x, -y), (-x, -y)$ sont aussi solutions. Donc on choisis

une solution avec $x, y > 0$. Sous ces contraintes, on a encore $y > (\alpha \cdot \beta)x$ puisque

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2(2\alpha^2 + (\alpha \cdot \beta)^2) + 1} \\ &> x \cdot \sqrt{2\alpha^2 + (\alpha \cdot \beta)^2} \\ &> x \cdot (\alpha \cdot \beta) \text{ comme } \alpha^2 > 0. \end{aligned}$$

Il reste maintenant à montrer que les classes γ de carré 0 ou -2 construites sont effectives. Puisque $\gamma^2 \geq -2$ alors Riemann-Roch 2.2.11 dit que γ ou $-\gamma$ est effectif. Donc supposons que $-\gamma$ est effectif.

Comme dans les deux cas on a $y > (\alpha \cdot \beta)x$ alors on a écrit γ sous la forme $a\alpha - b\beta$ où $a, b > 0$. Alors $a\alpha - \gamma = b\beta \in \partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est extrémal par 3.3.3et une somme de deux classes effectives donc ces deux classes sont extrémales dans le cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$, en particulier $\alpha \in \partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Mais $\alpha \in \mathcal{C}_X$ et $\mathcal{C}_X$ est un cône ouvert, ainsi α se trouve dans l'intérieur de $\mathcal{C}_X$. Or $\mathcal{C}_X \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ donc α est dans l'intérieur de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est donc c'est absurde.

□

3.4 Théorèmes de classifications de Kovács

On peut déjà classifier les différentes structures possibles du cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ d'une surface K3 projective X de rang de Picard $\rho(X)$ égal à 1 ou 2.

Le cas où $\rho(X) = 1$ est facile : on a $\mathrm{NS}(X) = \mathbf{Z} \cdot H$ pour une classe H de fibré ample et donc $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot H$.

Le cas où $\rho(X) = 2$ est déjà plus intéressant :

Théorème 3.4.1 (de Kovács pour un rang de Picard égal à 2 - [Kov94], illustrations : [Huy16]). *Soit X une surface K3 projective avec un rang de Picard $\rho(X) = 2$. Alors l'une des 4 situations suivantes est réalisée :*

(i) On a $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$ et $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X) = 0$; dans ce cas

$$\mathrm{NE}(X) = \mathrm{Amp}(X).$$

(ii) On a $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$ et $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot [E_1] \cup \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot [E_2]$ où l'union est disjointe et où E_1, E_2 sont des courbes elliptiques; dans ce cas

$$\mathrm{NE}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0}[E_1] + \mathbf{R}_{\geq 0}[E_2].$$

(iii) *On a* $\mathrm{Amp}(X) \subsetneq \mathcal{C}_X$ *et* $\partial\mathcal{C}_X \cap \partial\mathrm{Amp}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot [E]$ *où* E *est une courbe elliptique ; dans ce cas il existe une unique classe de (-2)-courbe* $[C]$ *dans* NS(X) *et on a*

$$\mathrm{NE}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot [E] + \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot [C].$$

(iv) *On a* $\mathrm{Amp}(X) \subsetneq \mathcal{C}_X$ *et* $\partial\mathcal{C}_X \cap \partial\mathrm{Amp}(X) = 0$ *; dans ce cas il existe deux et seulement deux classes distinctes de (-2)-courbes* $[C_1], [C_2]$ *et on a*

$$\mathrm{NE}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot [C_1] + \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot [C_2].$$

.

Démonstration. Remarquons tout de suite que comme $\rho(X) = 2$, les cônes convexes fermés sont donnés par deux rayons extrémaux par [Roc70, Thm 18.5].

Nous allons commencer par justifier pourquoi aucune autre situation ne peut arriver. Et rappelons que chaque classe entière $[E]$ de carré 0 nef est un multiple d'une courbe elliptique grâce à 2.2.28.

Dans le cas où $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$ **:** S'il existe une classe entière $[E_1] \in \partial\mathcal{C}_X$ alors par le lemme 3.3.7 il existe une autre classe entière $[E_2] \in \partial\mathcal{C}_X$ qui n'est pas un multiple de $[E_1]$. Puisque $\rho(X) = 2$, le bord $\partial\mathcal{C}_X$ est composé de deux rayons distincts, on a donc trouvé les deux rayons : ce sont $\mathbf{R}_{\geq 0}[E_1]$ et $\mathbf{R}_{\geq 0}[E_2]$. De plus, d'après 2.2.28, les classes $[E_1], [E_2]$ sont des multiples de courbes elliptiques $[E_1'], [E_2']$. Quitte à remplacer $([E_1], [E_2])$ par $([E_1'], [E_2'])$, on peut supposer que $\partial\mathcal{C}_X$ est composé de deux rayons distincts engendrés par des courbes elliptiques $[E_1]$ et $[E_2]$. Donc seuls les cas *(i)* et *(ii)* sont possibles.

Dans le cas où $\mathrm{Amp}(X) \subsetneq \mathcal{C}_X$ **:** On a nécéssairement une (-2)-courbe à cause de la description du cône ample 3.2.3 et de la remarque 3.2.4. De plus, on ne peut pas avoir $\partial\mathcal{C}_X \cap \partial\mathrm{Amp}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0}\delta_1 \cup \mathbf{R}_{\geq 0}\delta_2$ où $\delta_1^2 = \delta_2^2 = 0$ avec $\delta_1 \notin \mathbf{R} \cdot \delta_2$. En effet, pour $\rho(X) = 2$, le bord $\mathcal{C}_X$ et $\mathrm{Amp}(X)$ sont deux cônes convexes donc engendrés par leur deux rayons extrémaux. On aurait alors $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$. Donc, en utilisant le lemme 3.3.8, soit $\partial\mathcal{C}_X \cap \partial\mathrm{Amp}(X)$ contient une unique classe δ_1 de carré 0 soit elle n'en contient aucune (cas *(iv)*). Il reste donc a montrer que si $\partial\mathcal{C}_X \cap \partial\mathrm{Amp}(X)$ contient une classe δ_1 alors $\partial\mathcal{C}_X \cap \partial\mathrm{Amp}(X)$ contient une classe entière $[E]$ de carré 0 et on sera dans le cas *(iii)*.

Pour cela on se donne la classe δ_2 définissant le deuxième rayon de $\mathcal{C}_X$, une (-2)-courbe $[C]$ et H un fibré ample. D'après 3.3.8, on peut trouver une

classe entière γ à l'opposé de $[C]$ par rapport à H et de carré -2 ou 0 et il faut maintenant voir que γ est de carré 0. On suppose donc que $\gamma^2 = -2$. On a donc que $C^\perp$ et $\gamma^\perp$ coupent $\mathcal{C}_X$ en deux parties déterminées par le signe de l'intersection avec ces classes, l'une des parties contenant δ_1 et l'autre partie contenant δ_2.

Tout d'abord $\delta_1 \cdot C > 0$ puisque δ_1 est nef et que si $\delta_1 \cdot C = 0$ alors $C^\perp = \mathbf{R} \cdot \delta_1$ et dans ce cas $C^\perp$ ne coupe pas $\mathcal{C}_X$ en deux partie puisque δ_1 est sur le bord du cône positif. Le même raisonnement vaut pour montrer que $\gamma \cdot \delta_1 > 0$. Mais γ est oppposée à β par rapport à H, donc δ_2 qui vérifie $\delta_2 \cdot \gamma < 0$ vérifie alors $\delta_2 \cdot C > 0$. Mais c'est absurde car alors toutes les classes de $\mathcal{C}_X$ sont d'intersection positive avec C. Ainsi, γ est rationnelle est de carré nul donc on prend un multiple $[E]$ de γ entier et on est bien dans le cas *(iii)*.

On peut donc maintenant passer au calcul de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ dans chaque cas.

Cas *(i)* : Puisque $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$ alors le premier point de 3.2.4 montre qu'il n'existe pas de (-2)-courbes. De plus, puisque $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X) = 0$ alors il n'existe pas non plus de courbe de carré 0. Ainsi $\mathrm{NE}(X) \subset \mathcal{C}_X = \mathrm{Amp}(X)$. Mais on a déjà $\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{NE}(X)$. Donc

$$\mathrm{NE}(X) = \mathrm{Amp}(X) \text{ et alors } \overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathrm{Nef}(X).$$

Cas *(ii)* : De même, puisque $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$ alors la remarque 3.2.4 dit qu'il n'existe pas de (-2)-courbes. Ainsi $\mathrm{NE}(X) \subset \overline{\mathcal{C}_X} = \mathbf{R}_{\geq 0}[E_1] + \mathbf{R}_{\geq 0}[E_1]$. Mais $[E_1], [E_2] \in \mathrm{NE}(X)$ et donc

$$\mathrm{NE}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0}[E_1] + \mathbf{R}_{\geq 0}[E_1].$$

Cas *(iii)* : On suppose que $\mathrm{Amp}(X) \subsetneq \mathcal{C}_X$ et que $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{Amp}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0}[E]$. Le cône convexe $\mathrm{Amp}(X)$ a deux faces, l'une d'elle est donnée par $\mathbf{R}_{\geq 0}[E]$ et l'autre par un mur. Puisque tout mur définit une face de codimension 1 de $\mathrm{Amp}(X)$ par 3.2.4, il existe un et un seul mur donc il existe une et une seule classe de (-2)-courbe $[C]$ dans $\mathrm{NS}(X)$. On a donc

$$\mathrm{Amp}(X) = \{\alpha \in \mathcal{C}_X \mid \alpha \cdot C > 0\}.$$

Mais alors si C' est une courbe qui ne contient pas C, on a $C' \cdot C \geq 0$ donc $[C'] \in \mathrm{Nef}(X)$. Donc toute courbe est nef ou contient C. Ainsi $\mathrm{NE}(X) = \mathrm{Nef}(X) + \mathbf{R}_{\geq 0}[C]$.

On sait que $\overline{\mathcal{C}_X}$ est engendré par $[E]$ et une autre classe $[E']$ entière par 3.3.7. Et comme $C^\perp$ doit couper $\mathcal{C}_X$ en deux parties, et que $C \cdot E > 0$, on a

$C \cdot E' < 0$ donc E' contient C et donc

$$\mathrm{Nef}(X) \subset \overline{\mathcal{C}_X} \subset \mathbf{R}_{\geq 0}[E] + \mathbf{R}_{\geq 0}[C].$$

On a donc

$$\mathrm{NE}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0}[E] + \mathbf{R}_{\geq 0}[C].$$

Cas *(iv)* : Et enfin, on suppose que $\mathrm{Amp}(X) \subsetneq \mathcal{C}_X$ et que $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{Amp}(X) = 0$. De même, on cherche les deux rayons de $\partial\mathrm{Amp}(X)$. Puisqu'aucun de ces deux rayons ne contient de classe de $\partial\mathcal{C}_X$, ils doivent tout deux être donnés par un mur. On a donc deux et seulement deux murs et donc deux et seulement deux classes distinctes de (-2)-courbe $[C_1], [C_2]$.

Par le même argument qu'au point *(iii)*, toute courbe est soit d'intersection strictement positive avec C_1 et C_2 soit contient l'une des deux, donc

$$\mathrm{NE}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0}[C_1] + \mathrm{Nef}(X) + \mathbf{R}_{\geq 0}[C_2].$$

Or $\mathrm{Nef}(X)$ n'intersecte pas le bord de $\mathcal{C}_X$ donc comme a $\rho(X) = 2$, on peut choisir deux classes rationnelles δ_1, δ_2 avec $\delta_1 \cdot C_1, \delta_2 \cdot C_2 > 0$ et $\delta \cdot C_2, \delta_2 \cdot C_1 < 0$. On a alors que $\mathrm{Nef}(X)$ est contenu dans le cône engendré par δ_1 et δ_2 qui est lui-même contenu dans $\mathbf{R}_{\geq 0}[C_1] + \mathbf{R}_{\geq 0}[C_2]$. Ainsi, on a

$$\mathrm{NE}(X) = \mathbf{R}_{\geq 0}[C_1] + \mathbf{R}_{\geq 0}[C_2].$$

□

Pour démontrer le prochain théorème nous aurons besoin de quelques lemmes. Rappelons qu'un cône C est circulaire en $x \in \partial C$ s'il existe un ouvert $U \subset \partial C$ tel qu'aucun point de U n'admet de voisinage polyédral dans $\overline{C}$.

Lemme 3.4.2. *Pour $\rho(X) \geq 3$, le cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ n'a aucune partie circulaire si et seulement si il est l'adhérence du cône engendré par les (-2)-courbes*

Démonstration. Supposons que $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est l'adhérence du cône engendré par les (-2)-courbes et supposons par l'absurde que $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est circulaire en $x \in \partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$. On a un ouvert $U \subset \partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$ dont aucun point n'admet de voisinage polyédral dans $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. On peut supposer que $U = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot U$. Mais donc d'après 3.3.5, $U \subset \partial\mathcal{C}_X$. Mais alors il existe un voisinage de U dans $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ dont tous les éléments sont d'auto-intersection ≥ 0. Donc comme $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est l'adhérence du cône engendré par les (-2)-courbes alors

$U \subset \overline{\bigcup_{C\simeq\mathbf{P}^1} \mathbf{R}_{\geq 0}[C]}$ donc U admet un élément d'auto-intersection -2 < 0 arbitrairement proche dans $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ ce qui est impossible. Donc $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ n'a pas de partie circulaire.

Réciproquement, si $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ n'est pas l'adhérence du cône engendré par les (-2)-courbes, alors $\partial\overline{\mathrm{NE}}(X) \not\subset \overline{\bigcup_{C\simeq\mathbf{P}^1} \mathbf{R}_{\geq 0}[C]}$, donc on pose $U := \partial\overline{\mathrm{NE}}(X) \setminus \overline{\bigcup_{C\simeq\mathbf{P}^1} \mathbf{R}_{\geq 0}[C]}$ et c'est un ouvert de $\partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Mais d'après 3.3.3,

$$U \subset \partial\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset \partial\mathcal{C}_X \cup \overline{\bigcup_{C\simeq\mathbf{P}^1} \mathbf{R}_{\geq 0}[C]}.$$

On a donc $U \subset \partial\overline{\mathrm{NE}}(X) \cap \partial\mathcal{C}_X$.

Supposons par l'absurde qu'on a un point x de $U \subset \partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$ qui admet un voisinage polyédral P dans $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ qui contient x dans son intérieur relatif à $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Alors P ne peut pas contenir x dans son intérieur relatif à l'espace ambiant car sinon on aurait $P \not\subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$. Donc x est sur une face F de P qui contient un ouvert U' de $\partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$ contenant x. On peut supposer, quitte à rétrécir cet U' et U que $U = U'$. Par conséquent, $U \subset F$. Donc en particulier l'hyperplan $\mathbf{R} \cdot F$ intersecte $\partial\mathcal{C}_X$ en un ouvert U de $\partial\mathcal{C}_X$ mais c'est impossible par 3.0.5. Donc U est une partie circulaire de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

□

Lemme 3.4.3. *Si $U \subset \partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est une partie circulaire de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ alors U est contenu dans $\partial\mathcal{C}_X$ et $\mathbf{R} \cdot U$ contient une classe γ effective entière de carré 0.*

Démonstration. Supposons donc que $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est circulaire en $U \subset \partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Cela ne peut arriver que quand $U \subset \partial\mathcal{C}_X$ d'après 3.3.5. Supposons maintenant que $U = \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot (\partial\mathcal{C}_X \cap B)$ où B est une petite boule centrée en un point $x \in U$. A ce moment là, il existe des classes entière α arbitrairement proche de U. Mais donc on peut choisir γ entière effective de carré -2 ou 0 opposé à $[C]$ par rapport à α grâce à 3.3.8. Ainsi, si l'on choisis $\alpha \in (\mathbf{R}_{\geq 0} \cdot B) \cap \mathrm{NS}(X)$ suffisament proche de x alors le plan $\mathbf{R} \cdot [C] \oplus \mathbf{R} \cdot \alpha$ coupe $\partial\mathcal{C}_X \cap B = U$ en un rayon sur lequel se trouve γ. On voit comme cela que $\gamma^2 = 0$. On a donc trouver une classe effective entière de carré 0 dans $\mathbf{R} \cdot U$. □

On peut maintenant démontrer le théorème de Kovács pour $\rho(X) \geq 3$. Pour montrer des raffinement du théorème (donnés en fin d'énoncé), on aura besoin du théorème de Meyer [Ser77, p. 77] qui assure l'existence de 0-

courbes quand $\rho(X) \geq 5$. Et du lemme 1.3.8 qui fourni l'existence d'une (-2)-courbe quand $\rho(X) \geq 12$.

Théorème 3.4.4 (de Kovács pour un rang de Picard supérieur à 3 - [Kov94], illustrations : [Huy16]). *Soit X une surface K3 projective avec un rang de Picard $\rho(X) \geq 3$. Alors l'une des 3 situations suivantes est réalisée :*

(v) On a $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$ et $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X) = 0$; dans ce cas

$$\mathrm{NE}(X) = \mathrm{Amp}(X).$$

(vi) On a $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$ et $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$ est dense dans $\partial\mathcal{C}_X$; dans ce cas

$$\mathcal{C}_X \subsetneq \mathrm{Amp}(X) \subsetneq \mathrm{NE}(X) \subsetneq \overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathcal{C}_X}$$

et

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\sum_{E \subset X \text{ courbe elliptique}} [E]}.$$

(vii) On a $\mathrm{Amp}(X) \subsetneq \mathcal{C}_X$; dans ce cas

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\sum_{C \simeq \mathbf{P}^1} \mathbf{R}_{\geq 0}[C]}$$

Les cas (v),(vi),(vii) sont analogues aux cas (i),(ii),(iv) respectivement. De plus, si $\rho(X) \geq 5$ seuls les cas (vi),(vii) peuvent arriver et si $\rho(X) \geq 12$ alors on a nécessairement (vii).

Démonstration. La preuve suivante suit celle donné par Huybrechts dans son théorème [Huy16, Thm 8.3.11.]. On va démontrer simultanément qu'il n'y a pas plus de possibilités et décrire le cône de Mori dans chaque cas.

Si X n'a pas de (-2)-courbe alors $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$ si en plus $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X) = 0$, on a :

Cas *(v)* : La description du cône de Mori est analogue a celle du cas *(i)* ci-dessus. On obtient bien

$$\mathrm{NE}(X) = \mathrm{Amp}(X).$$

Lorsque X n'a pas de (-2)-courbe, le cas *(v)* ne peut arriver que lorsque $\rho(X) < 5$ par le théorème de Meyer [Ser77]. Donc si $\rho(X) \geq 5$, on a nécéssairement une 0-courbe. Plus généralement, s'il existe une 0-courbe dans X alors 3.3.7 dit que $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$ est dense dans $\partial\mathcal{C}_X$. Ainsi on a :

Cas *(vi)* : Si $\mathrm{Amp}(X) = \mathcal{C}_X$ et $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$ est dense. Alors il n'existe pas de (-2)-courbes par 3.2.4 et ainsi, par 3.3.3, on a $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathcal{C}_X}$. De plus, les classes de $\partial\mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}}$ sont des classes de $\mathrm{NE}(X) \setminus \mathrm{Amp}(X)$. Comme il y a qu'un nombre dénombrable de classe de fibré de carré 0, il n'y a qu'un nombre dénombrable de rayons de $\partial\overline{\mathcal{C}_X}$ engendré par un fibré de carré 0. Ainsi une classe de $\partial\mathcal{C}_X \cap (\mathrm{NS}(X)_{\mathbf{R}} \setminus \mathrm{NS}(X)_{\mathbf{Q}})$ qui n'est pas sur un rayon engendré par un fibré de carré 0 est une classe de $\overline{\mathcal{C}_X} \setminus \mathrm{NE}(X)$. On a bien

$$\mathcal{C}_X \subsetneq \mathrm{Amp}(X) \subsetneq \mathrm{NE}(X) \subsetneq \overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathcal{C}_X}$$

De plus, comme toute classe rationnelle du bord de $\overline{\mathcal{C}_X}$ est nef, ce sont des multiples d'une courbe elliptique $[E]$ de X. Donc l'ensemble formé des rayons des telles courbes elliptiques est dense dans $\partial\overline{\mathcal{C}_X}$. Ainsi $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathcal{C}_X}$ est l'adhérence du cône engendré par les courbes elliptique de X :

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\sum_{E \subset X \text{ courbe elliptique}} \mathbf{R}_{\geq 0} \cdot [E]}.$$

Maintenant, voyons ce qu'il se passe lorsque X contient une (-2)-courbe *ie* lorsque $\mathrm{Amp}(X) \subsetneq \mathcal{C}_X$, rappelons que c'est automatiquement le cas quand $\rho(X) \geq 12$ à cause du lemme 1.3.8.

Cas *(vii)* : On suppose qu'il existe une (-2)-courbe $[C]$ et le but est maintenant de démontrer que le cône de Mori $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est l'adhérence du cône engendré par toutes les (-2)-courbes de X. D'après 3.3.5, toute classe de $\partial\overline{\mathrm{NE}}(X) \setminus \overline{\mathcal{C}_X}$ peut-être mise dans un sous-cône polyédral de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Ainsi, montrer que $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est l'adhérence du cône engendré par toutes les (-2)-courbes revient à montrer que $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ n'a aucune partie circulaire d'après 3.4.2.

Supposons donc que $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est circulaire en $U \subset \partial\overline{\mathrm{NE}}(X)$. On a donc $U \subset \partial\mathcal{C}_X$ et si on suppose que $U = \mathbf{R} \cdot U$ alors on trouve $\gamma \in \mathcal{C}_X \cap \mathrm{NS}(X)$ tel que $\gamma^2 = 0$ par 3.4.3.

J'affirme que $\gamma \cdot C > 0$. En effet, supposons que $\gamma \cdot C \leq 0$ alors on pose $\gamma_\varepsilon := (1-\varepsilon)\gamma + \varepsilon[C]$ où $\varepsilon \in \mathbf{Q}$. On prend $0 < \varepsilon \leq 1$, alors γ_ε est dans $\mathrm{NE}(X)$. Dans ce cas

$$\gamma_\varepsilon^2 = 2(1-\varepsilon)\varepsilon(\gamma \cdot C) - 2\varepsilon^2$$

Donc $\gamma_\varepsilon^2 < 0$. Mais donc un multiple $n_\varepsilon \cdot \gamma_\varepsilon \in (\overline{\mathrm{NE}}(X) \cap \mathrm{NS}(X)) \setminus \overline{\mathcal{C}_X}$ donc $(n_\varepsilon \cdot \gamma_\varepsilon)^2 = -2$. Or $n_\varepsilon \cdot \gamma_\varepsilon$ est arbitrairement proche de $\mathbf{R}_{>0}\gamma$. Ainsi, on a trouvé

des classes de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ arbitrairement proche de U qui sont d'autointersection -2 < 0, ce qui est absurde. Donc $\gamma \cdot C > 0$. Comme $\rho(X) \geq 3$, le théorème de l'indice de Hodge assure l'existence d'une classe $\gamma' \in (\mathbf{R} \cdot \gamma \oplus \mathbf{R} \cdot [C])^{\perp}$ telle que $\gamma'^2 < 0$. Alors, on définit :

$$\gamma_n := -2n^2(\gamma')^2(\gamma \cdot C)^3\gamma - 2n(\gamma \cdot C)^2\gamma' + [C]$$

Un calcul rapide montre que $\gamma_n^2 = -2$. Donc Riemann-Roch 2.2.11 assure que γ_n ou $-\gamma_n$ est effectif mais $\frac{1}{n^2}\gamma_n \cdot H > 0$ quand n est très grand ainsi γ_n est effectif au moins quand n est très grand. De plus,

$$\frac{1}{-2n^2(\gamma')^2(\gamma \cdot C)^3}\gamma_n \to \gamma$$

Ainsi, on a encore trouvé des classes de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ arbitrairement proche de U qui sont d'autointersection -2 < 0, ce qui est absurde. Ainsi $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ n'a pas de partie circulaire et on a donc bien :

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\sum_{C \simeq \mathbf{P}^1} \mathbf{R}_{\geq}[C]}.$$

□

Pour terminer cette partie sur les théorèmes de Kovács, je vais énoncer un corollaire sur la structure géométrique du cône de Mori.

Corollaire 3.4.5 (Corollaire 1 et 2 de [Kov94] - [Huy16]). *Pour une surface K3 projective.*

(i) Si $\rho(X) = 2$, alors $\mathrm{NE}(X)$ est rationnellement polyédral (ie polyédral engendré par des classes rationnelles) si et seulement si X contient une courbe elliptique E ou une (-2)-courbe $C \simeq \mathbf{P}^1$.

(ii) Si $\rho(X) \geq 3$, soit X ne contient pas de (-2)-courbe $C \simeq \mathbf{P}^1$ soit $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est l'adhérence du cône engendré par les (-2)-courbes.

(iii) On a soit $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est circulaire soit qu'il n'a aucune partie circulaire. Et dans le cas où $\rho(X) \geq 3$, le cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est circulaire si et seulement si $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathrm{Nef}(X) = \overline{C_X}$.

Démonstration. Le point *(i)* découle facilement du théorème 3.4.1. En effet, $\mathrm{NE}(X)$ est rationnellement polyédral si et seulement si X est de type *(ii),(iii)* ou *(iv)*. Et ce sont les seuls cas où X contient une courbe elliptique ou une (-2)-courbe.

De plus, le théorème 3.4.4 montre le point *(ii)*. En effet, les K3 de type *(v),(vi)* n'ont pas de (-2)-courbe tandis que celle de type *(vii)* en ont.

Pour le dernier point, si $\rho(X) = 1, 2$ alors $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ n'a aucune partie circulaire. Ensuite si $\rho \geq 3$, et si $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ admet une partie circulaire, alors 3.4.2 montre que $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ n'est pas l'adhérence du cône engendré par les (-2)-courbe. Mais alors, c'est equivalent au fait que X est de type *(v)* ou *(vi)* d'après la classification 3.4.4. Or dans chacun de ces cas, et ce sont les seuls, $\overline{\mathrm{NE}}(X) = \mathrm{Nef}(X) = \overline{\mathcal{C}_X}$. □

3.5 Exemples de surfaces K3 pour chacune des possibilités

Pour donner des exemples de surfaces K3, on aura besoin d'un théorème de Morrison 1.3.9. Ce théorème assure que pour tout réseau Γ pair de rang $\rho \leq 10$ et de signature $(1, \rho - 1)$, il existe une surface K3 X telle que $\mathrm{NS}(X) \simeq \Gamma$; notons que dans ce cas $\mathrm{NS}(X)$ admet une classe d'autointersection strictement positive et donc X est projective grâce au théorème [Ven84, Thm IV.5.2].

Exemple 3.5.1 (Surface K3 de type (i) et (v)). On cherche donc une surface K3 sans 0-courbe ni (-2)-courbe. Pour cela on considère la forme quadratique sur $\mathbf{Z}^\rho$ pour $\rho = 2, 3, 4$ définit par :

$$q(x) := 4(7x_1^2 - \sum_{i=2}^{\rho} x_i^2)$$

Ce réseau est bien pair et de signature $(1, \rho - 1)$, donc il existe une surface K3 projective X dont le groupe de Néron-Sévéri est isomorphe à ce réseau.

Il faut voir que les équations $q(x) = 0$ et $q(x) = -2$ n'ont pas de solution dans $\mathbf{Z}^\rho$. La deuxième équation $q(x) = -2$ n'a pas de solution puisque 4 divise $q(x)$. Pour l'autre, on se donne un $x \in \mathbf{Z}^\rho$ solution de $q(x) = 0$. Alors $7x_1^2 = \sum_{i=2}^{\rho} x_i^2$ mais dans $\mathbf{F}_7$ les carrés sont 0,1,2,4 et aucune somme de $\rho - 1$ tels nombres ne fait 0 modulo 7. Donc $q(x)$ ne représente pas 0.

Ainsi, X est bien du type *(i)* pour $\rho = 2$ et *(v)* pour $\rho \geq 3$ grâce aux théorèmes 3.4.1 et 3.4.4.

Exemple 3.5.2 (Surface K3 de type (ii) et (vi)). On cherche donc une surface K3 sans (-2)-courbe mais avec une 0-courbe qui donnera une courbe elliptique

par 3.2.5. Pour cela on considère la forme quadratique sur $\mathbf{Z}^\rho$ pour $\rho = 2, ..., 11$ définit par :

$$q(x) := 4(x_1^2 - \sum_{i=2}^{\rho} x_i^2)$$

Ce réseau est bien pair et de signature $(1, \rho - 1)$, donc il existe une surface K3 projective X dont le groupe de Néron-Sévéri est isomorphe à ce réseau.

On voit de plus que 4 divise $q(x)$ donc l'équation $q(x) = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbf{Z}^\rho$. De plus le point du réseau $e = (1, 1, 0, ..., 0)$ vérifie $q(e) = 0$ donc q représente 0.

Ainsi, X est bien du type *(ii)* pour $\rho = 2$ et *(vi)* pour $\rho \geq 3$ grâce aux théorèmes 3.4.1 et 3.4.4.

Exemple 3.5.3 (Surface K3 de type (iii)). On cherche une surface K3 ayant une (-2)-courbe et qui admet une seule classe de courbe elliptique nef. Si on trouve une surface avec une unique (-2)-courbe alors elle sera nécessairement de ce type d'après 3.4.1. Pour cela on considère la forme quadratique sur $\mathbf{Z}^2$ définit par :

$$q(x) := -2x_1^2 + 6x_1x_2$$

Ce réseau Γ est bien pair et de signature $(1, \rho - 1)$, donc il existe une surface K3 projective X dont le groupe de Néron-Sévéri est isomorphe à ce réseau.

Un calcul montre que les seuls éléments de Γ de carré -2 sont $(\pm 1, 0)$. Comme ces deux éléments sont opposés, seulement l'un d'entre eux correspond à un fibré effectif L de carré -2 sous l'isomorphisme $\Gamma \simeq \mathrm{NS}(X)$. Enfin un tel fibré donne naissance à une (-2)-courbe C par 2.2.9 or il n'y a qu'une seule classe de carré -2 et donc $L \simeq \mathcal{O}(C)$. Ainsi X n'a qu'une seule classe de (-2)-courbe et pour un choix d'isomorphisme elle correspond à (1,0).

Ainsi, X est bien du type *(iii)* au théorème 3.4.1.

D'ailleurs, on peut vérifier que (1,1) correspond à un fibré ample et que le point (0,1) correspond à la courbe elliptique nef puisque $q(1, 1) = 4 > 0, q(0, 1) = 0$. Il reste à voir respectivement que (1,1) est ample, que (0,1) est effectif et que (0,1) est nef mais on a respectivement :

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 > 0 \ , \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 3 > 0 \text{ et } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3 > 0.$$

Exemple 3.5.4 (Surface K3 de type (iv)). On cherche une surface K3 ayant des (-2)-courbes mais de pas de fibré de carré 0 et elle sera automatiquement

du type *(iv)* par 3.4.1. Pour cela on considère la forme quadratique sur $\mathbf{Z}^2$ définit par :

$$q(x) := -2x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2$$

Ce réseau est bien pair et de signature $(1, \rho - 1)$, donc il existe une surface K3 projective X dont le groupe de Néron-Sévéri est isomorphe à ce réseau.

De plus $q(3,1) = q(1,3) = -2$ et le discriminant de cette forme quadratique est $\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 48$ qui n'est pas un carré donc q ne représente pas 0. Donc la X est bien du type *(iv)*.

Exemple 3.5.5 (Surface K3 de type (vii)). Pour ce type là, on a un exemple concret : les surfaces de Kummer [Huy16, Ex 1.1.3 puis Partie 3.2.5]. En particulier, on peut montrer que la surface quartique de Fermat est une surface de Kummer, voir [Huy16, Ex 14.3.18]

Chapitre 4

Familles de surfaces K3

Dans cette partie, je vais essayer de présenter quelques résultats d'Oguiso publié dans son article [Ogu03].

4.1 Lieu de Noether-Lefschetz

Le but de cette partie est d'étudier le groupe de Picard de surfaces K3 variant en famille. Les théorèmes qui se touve dans cette partie sont prouvés dans [Ogu03].

Soit $f : \mathcal{X} \to \Delta$ une famille de surfaces K3 avec Δ un petit disque ouvert de $\mathbf{C}$. On suppose de plus que la famille est non iso-triviale, c'est à dire que f n'est pas isomorphe à la famille produit $\Delta \times \mathcal{X}_0 \to \Delta$.

Soit $\rho_0 = \min(\rho(\mathcal{X}_t) \mid \forall t \in \Delta)$, on appelle *lieu de Noether-Lefschetz* l'ensemble $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta) := \{t \in \Delta \mid \rho_0 > \rho(\mathcal{X}_t)\}$.

On choisit $\tau : \mathrm{R}^2 f_* \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \Lambda \times \Delta$ un marquage de la famille de sorte qu'on puisse considérer une application des périodes $\mathcal{P} : \Delta \to \mathcal{D} \subset \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbf{C}})$. Soit $0 \in \Delta$, par propriété de la déformation universelle $\mathcal{Y} \to \mathrm{Def}(\mathcal{X}_0)$, il existe une unique application $h : \Delta \to \mathrm{Def}(\mathcal{X}_0)$ où $\mathcal{Y}_{h(t)} \simeq \mathcal{X}_t$. En particulier, l'application h vérifie $\mathcal{P}' \circ h = \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}'$ est l'application des périodes locales de $\mathrm{Def}(\mathcal{X}_0)$. Mais $\mathcal{P}'$ est un isomorphisme local par 2.3.6 donc est non constante et h est non constante puisque la famille est non iso-trivial, par conséquent $\mathcal{P}$ est non constante.

Proposition 4.1.1 ([Ogu03]). *Le lieu de Noether-Lefschetz* $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ *est dénombrable et il existe un sous-réseau primitif* Λ_{gen} *de* Λ *vérifiant les*

propriétés suivantes :

1) *Pour tout* $t \in \Delta$, $\Lambda_{\text{gen}} \subset \tau_t(\text{NS}(\mathcal{X}_t))$*, en particulier on a* $\text{NL}(\mathcal{X}/\Delta) = \{t \in \Delta \mid \Lambda_{\text{gen}} \subsetneq \tau_t(\text{NS}(\mathcal{X}_t))\}$.
2) *L'ensemble des* $t \in \Delta$ *tel que* $\tau_t(\text{NS}(\mathcal{X}_t)) = \Lambda_{\text{gen}}$ *est indénombrable et dense.*

Démonstration. Soit E l'ensemble dénombrable des sous-réseaux primitifs Λ_{prim} de Λ et je note $\Delta_{\Lambda_{\text{prim}}} := \{t \in \Delta \mid \tau_t(\text{NS}(\mathcal{X}_t)) = \Lambda_{\text{prim}}\}$. Ainsi, puisque le réseau de Néron-Sévéri est toujours un sous réseau primitif de Λ par 1.3.7 , on a $\Delta = \bigcup_{\Lambda_{\text{prim}} \in E} \Delta_{\Lambda_{\text{prim}}}$. Comme Δ est indénombrable, il existe nécéssairement un réseau Λ_{gen}, tel que $\Delta_{\text{gen}} := \Delta_{\Lambda_{\text{gen}}}$ est indénombrable. Ce qui prouve la première partie du 2ème point.

Si Δ_{gen} n'admet pas de point d'accumulation alors pour tout $t \in \Delta_{\text{gen}}$, il existe une boule de centre et $(x_t, y_t) \in \mathbf{Q}^2$ de rayon rationnel $r_t \in \mathbf{Q}_{>0}$ qui contient t et qui ne contient aucun autre point de Δ_{gen}. En particulier, Δ_{gen} s'injecte dans $\mathbf{Q}^2 \times \mathbf{Q}_{>0}$ par l'application $t \mapsto ((x_t, y_t), r_t)$. Mais $\mathbf{Q}^2 \times \mathbf{Q}_{>0}$ est dénombrable, on arrive donc à une absurdité. Donc Δ_{gen} admet un point d'accumulation.

Pour tout $t \in \Delta_{\text{gen}}$, on a $\mathcal{P}(t) = \tau_t(H^{2,0}(X_t))$ mais puisque $H^{2,0}(X_t) \perp \text{NS}(X_t)$, on a $\mathcal{P}(t) \in \tau_t(\text{NS}(X_t))^{\perp}_{\mathbf{C}} = \Lambda^{\perp}_{\text{gen},\mathbf{C}}$. Par conséquent la composition

$$\Delta \xrightarrow{\mathcal{P}} \Lambda_{\mathbf{C}} \to \Lambda_{\mathbf{C}}/\Lambda^{\perp}_{\text{gen},\mathbf{C}}$$

est holomorphe et nulle sur Δ_{gen}. Mais comme Δ_{gen} est de dimension 1 avec un point d'accumulation, le théorème des zéros isolés assure que c'est une application identiquement nulle. Ainsi l'application des périodes $\mathcal{P}$ est à valeurs dans $\mathcal{D} \cap \mathbf{P}(\Lambda^{\perp}_{\text{gen},\mathbf{C}})$.

On déduit de ce qui précède que pour toute fibre X_t, $\tau_t(H^{2,0}(X_t)) \perp \Lambda_{\text{gen}}$ et donc $\Lambda_{\text{gen}} \subset \tau_t(\text{NS}(X_t))$ ainsi $\text{NL}(X/\Delta) = \Delta \setminus \Delta_{\text{gen}}$. On a donc démontré le 1er point

Par ailleurs, si $\Delta_{\Lambda_{\text{prim}}}$ est aussi indénombrable alors il a aussi un point d'accumulation et donc la même discussion conclue que pour tout $t \in \Delta$, $\Lambda_{\text{prim}} \subset \tau_t(\text{NS}(X_t))$ donc en particulier pour les $t \in \Delta_{\text{gen}}$, $\Lambda_{\text{gen}} \subset \Lambda_{\text{prim}}$ et l'inclusion inverse serait aussi vraie par symétrie. Donc $\Lambda_{\text{gen}} = \Lambda_{\text{prim}}$ et $\Delta_{\Lambda_{\text{prim}}} = \Delta_{\text{gen}}$. Par conséquent, il existe un unique $\Delta_{\Lambda_{\text{prim}}} = \Delta_{\text{gen}}$ qui est indénombrable. Ainsi $\Delta \setminus \Delta_{\text{gen}} = \bigcup_{\Lambda_{\text{prim}} \in E \setminus \{\Lambda_{\text{gen}}\}} \Delta_{\Lambda_{\text{prim}}}$ est une union dénombrable d'ensembles dénombrables donc $\text{NL}(X/\Delta) = \Delta \setminus \Delta_{\text{gen}}$ est dénombrable.

Enfin, comme Δ_{gen} est le complémentaire dans Δ d'un ensemble dénombrable alors Δ_{gen} est dense. Ce qui clot la preuve du 2ème point et ainsi de la proposition.

□

Je noterai maintenant $\mathcal{D}' := \mathcal{D} \cap \mathbf{P}(\Lambda^{\perp}_{\text{gen},\mathbf{C}})$. Dans ce qui suit, s'il n'y a pas d'ambiguité, je vais identifier $H^2(X_t, \mathbf{Z})$ avec Λ via le marquage τ_t. Avant de démontrer le théorème principal de cette partie, nous allons avoir besoin de deux lemmes.

Lemme 4.1.2. $\text{rg}(\Lambda^{\perp}_{\text{gen}}) \geq 3$

Démonstration. Soit $t \in \Delta_{\text{gen}}$ et soit une 2-forme holomorphe partout non dégénérée de $\mathcal{X}_t$, alors ω est orthogonale à toute classe (1,1) et en particulier $\omega \in \Lambda^{\perp}_{\text{gen},\mathbf{C}}$. Mais donc $\mathbf{R} \cdot \text{Re}(\omega) \oplus \mathbf{R} \cdot \text{Im}(\omega) \subset \Lambda^{\perp}_{\text{gen},\mathbf{R}}$. Donc si $\text{rg}(\Lambda^{\perp}_{\text{gen}}) \leq 2$ alors l'inclusion précédente est une égalité et par conséquent $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap \mathbf{P}(\Lambda^{\perp}_{\text{gen},\mathbf{C}}) = \{\mathbf{C} \cdot \omega, \mathbf{C} \cdot \overline{\omega}\}$. En particulier, $\mathcal{P}$ qui est continue serait à valeurs dans un ensemble de deux points, donc constante, ce qui est absurde. □

On aimerait mener une étude locale du lieu de Noether-Lefschetz autour d'un point $p \in \Delta$. Je me donne donc un ouvert U de Δ qui est une carte centrée en p et tel qu'on peut écrire :

$$\mathcal{P}|_U(z) = [1 : f_1(z) : \cdot : f_n(z)] \in \mathcal{D}'$$

avec f_i des fonctions holomorphes sur U et où l'on a choisi une base entière de $\Lambda^{\perp}_{\text{gen},\mathbf{C}}$ et donc $n \geq 2$ par le lemme précédent. Quitte à changer de base, on peut supposer que f_1 n'est pas constant. De plus, quitte à changer de centre, on peut supposer que $f_1(0) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, en effet, si $f_1(z) \in \mathbf{R}$ pour tout $z \in U$ alors f_1 serait est holomorphe à valeur dans $\mathbf{R}$ et donc serait constante mais ce n'est pas le cas.

Comme $n \geq 2$, les vecteurs $1, f_1(0), f_k(0) \in \mathbf{R}^2$ sont $\mathbf{R}$-linéairement dépendants et donc pour chaque $k \in \{2, \ldots, n\}$, on a $r_{0,k}, r_{1,k}, r_{2,k} \in \mathbf{R}$ non tous nuls tels que $r_{0,k} \cdot 1 + r_{1,k} \cdot f_1(0) + r_{2,k} \cdot f_k(0) = 0$. Si je note $f_{r_k}(z) := r_{0,k} \cdot 1 + r_{1,k} \cdot f_1(z) + r_{2,k} \cdot f_k(z)$, alors f_{r_k} est une fonction holomorphe sur U qui s'annule en 0. Une formulation équivalente du fait que $f_{r_k}(0) = 0$ est le fait que l'hyperplan

$$H_{r_k} := \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{R}} \mid r_{0,k} \cdot x_0 + r_{1,k} \cdot x_1 + r_{2,k} \cdot x_k = 0\}$$

est tel que $\mathcal{P}(0) \in H_{r_k} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

Lemme 4.1.3. $\mathcal{P}(U) \not\subset \bigcap_{k=2}^{n} H_{r_k} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$

Démonstration. Tout d'abord, puisque $f_1(0) \notin \mathbf{R}$, les vecteurs $1, f_1(0) \in \mathbf{R}^2$ sont $\mathbf{R}$-linéairement indépendant. Donc $r_{2,k} \neq 0$ car dans le cas contraire, on aurait

$$0 = 1 + r_{1,k} \cdot f_1(0) + r_{2,k} \cdot f_k(0) = 1 + r_{1,k} \cdot f_1(0)$$

ce qui est absurde. Par conséquent, les $H_{r_k} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ s'intersectent transversalement et donc $\bigcap_{k=2}^{n} H_{r_k} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \simeq \mathbf{P}^1$ est de dimension 1. De plus, $\mathbf{C} \cdot \omega := \mathcal{P}(0) \in \bigcap_{k=2}^{n} H_{r_k} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ donc $\bigcap_{k=2}^{n} H_{r_k}$ est l'image du plan défini positif $\mathbf{R} \cdot \mathrm{Re}(\omega) \oplus \mathbf{R} \cdot \mathrm{Im}(\omega) \subset \Lambda^{\perp}_{\mathrm{gen},\mathbf{R}}$ et ainsi $\mathcal{D}' \cap \bigcap_{k=2}^{n} H_{r_k} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \{\mathbf{C} \cdot \omega, \mathbf{C} \cdot \overline{\omega}\}$. Mais alors si $\mathcal{P}(U) \subset \mathcal{D}' \cap \bigcap_{k=2}^{n} H_{r_k} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, on aurait que $\mathcal{P}$ est constante, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{P}(U) \not\subset \bigcap_{k=2}^{n} H_{r_k} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. □

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème principal de cette partie :

Théorème 4.1.4 (Densité et dénombrabilité du lieu de Noether-Lefschetz en dimension 1 - [Ogu03]). *Soit une famille $f : \mathcal{X} \to \Delta$ non iso-triviale de surfaces K3 sur un disque Δ de $\mathbf{C}$. Alors le lieu de Noether-Lefschetz $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ est dénombrable et dense dans Δ.*

Démonstration. D'après la proposition 4.1.1, il reste à démontrer que le lieu de Noether-Lefschetz $\mathrm{NL}(X/\Delta)$ est dense dans Δ.

D'après le lemme précédent 4.1.3, on peut choisir un $k \in \{2, \dots, n\}$ tel qu'il existe $z \in U$ avec $\mathcal{P}(z) \notin H_{r_k} \times_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ c'est à dire que $f_{r_k}(z) \neq 0$. Par conséquent, f_{r_k} est une fonction holomorphe sur U qui s'annule en 0 et qui n'est pas identiquement nulle, donc les zéros de f_{r_k} sont isolés et en particulier, on peut choisir B une boule de centre 0 et telle que f_{r_k} n'admet pas de zéro sur $C := \partial B$.

On note donc

$$m_k := \min\{|f_{r_k}(z)| \mid z \in C\}$$

et

$$M := \max\{|f_i(z)| \mid z \in C, i \in \{0, \dots, n\}\}$$

où $f_0 = 1$. Ces nombres sont donc réels strictement positifs puisque $f_{r_k}(z)$ n'a pas de zéro sur C et que $f_1(z)$ est non identiquement nulle. Maintenant prenons un $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ assez proche de r_k dans le sens où pour chaque i, $|a_i - r_{i,k}| < \frac{m_k}{M \cdot (n+1)}$. Notons maintenant f_a, la fonction

$$f_a(z) := a_0 + a_1 f_1(z) + \cdots + a_n f_n(z).$$

A partir de là, on a pose pour tout $z \in C$,

$$\begin{aligned} |f_{r_k}(z) - f_a(z)| &= \left| \sum_{i=0}^{n} (r_{i,k} - a_i) \cdot f_i(z) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} |r_{i,k} - a_i| \cdot |f_i(z)| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \frac{m_k}{M \cdot (n+1)} \cdot M = m_k \leq |f_{r_k}(z)| \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de Rouché, les fonctions f_a et f_{r_k} ont le même nombre de zéros comptés avec multiplicité dans B et donc en particulier f_a admet un zéro dans B. Mais f_a dépend continuement de a et donc on peut choisir un tel a assez proche de r_k mais qui est rationnel $a \in \mathbf{Q}^{n+1} \setminus 0$ et tel que f_a admet un zéro $t_0 \in B$. C'est à dire que $\mathcal{P}(t_0) \in H_a := \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbf{P}^n_{\mathbf{C}} \mid \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x_i = 0\}$.

Maintenant revenons à Λ : on a pris une base entière de ${\Lambda_{\text{gen}}}^{\perp}$ et les équations qui définissent $\Lambda^{\perp}_{\text{gen}}$ sont des linéaires à coefficients rationnels de Λ. Ainsi, le a rationnel qu'on a choisit correspond à un vecteur $v \in \Lambda^{\perp}_{\text{gen},\mathbf{Q}} \subset \Lambda_{\mathbf{Q}}$. On peut donc prendre un $w \in \Lambda^{\perp}_{\text{gen}} \subset \Lambda$ entier en prenant un multiple de v. De plus, on a $H_v = H_w$ où les hyperplans H_v, H_w sont les projectifiés des deux orthogonaux $v^{\perp}, w^{\perp} \subset \Lambda_{\mathbf{C}}$. Ainsi $\mathcal{P}(t_0) \in H_w = \{x \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbf{C}}) \mid x \cdot w = 0\}$ c'est à dire que $\mathcal{P}(t_0) \cdot w = 0$. On a ainsi trouvé un w qui est (1,1) pour $\mathcal{X}_{t_0}$ et entier donc le théorème de Lefschetz sur les classe (1,1) dit que $w \in \tau_{t_0}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{t_0}))$. Mais comme $\Lambda_{\text{gen}} \cap \Lambda^{\perp}_{\text{gen}} = \{0\}$ et qu'on a pris $w \neq 0$ alors $w \in \tau_{t_0}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{t_0})) \setminus \Lambda_{\text{gen}}$ et donc $t_0 \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta) \cap U$. Par conséquent, $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ est dense dans Δ.

□

Je vais maintenant essayer de généraliser le théorème précédent à des familles de surfaces K3 sur une base de dimension quelconque.

Théorème 4.1.5 (Densité du lieu de Noether-Lefschetz en dimension quelconque). *Soit une famille $f : \mathcal{X} \to S$ non iso-triviale de surfaces K3 sur une base S de dimension quelconque. Alors le lieu de Noether-Lefschetz* $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/S)$ *est dense dans S.*

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de

la base S. Si S est de dimension 1, alors pour tout ouvert U suffisament petit de S le théorème précédent prouve que $\mathrm{NL}(\mathcal{X}|_U/U)$ est dense dans U. En particulier, il existe $t \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}|_U/U) \subset U$. Donc puisqu'on a l'inclusion $\mathrm{NL}(\mathcal{X}|_U/U) \subset \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$, on a trouvé un $t \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta) \cap U$. Ainsi, le lieu de Noether-Lefschetz $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ est dense.

Supposons maintenant que le théorème est vrai pour toute base de dimension $n-1$. Et soit $f : \mathcal{X} \to S$ une famille non iso-triviale de surface K3 où S est de dimension n. Soit U dans S un ouvert et on choisit une hypersurface S' de U qui intersecte U, alors la famille induite par changement de base $f' : \mathcal{X}' := \mathcal{X} \times_S S' \to S'$ est une famille de surfaces K3, et le lieu de Noether-Lefschetz de cette famille $\mathrm{NL}(X'/S') \subset \mathrm{NL}(\mathcal{X}/S)$. Mais d'après l'hypothèse de récurrence $U \cap S'$ intersecte $\mathrm{NL}(\mathcal{X}'/S')$ et alors $U \cap \mathrm{NL}(\mathcal{X}/S) \neq \emptyset$. On a donc prouvé que $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/S)$ est dense dans S. □

Remarque 4.1.6. Dans son article [Ogu03], Oguiso prouve ce théorème pour une famille $f : \mathcal{X} \to \Delta$ où Δ est un disque ouvert de $\mathbf{C}$ et j'ai essayé au début de la preuve précédente de me réduire à ce cas. En revanche, on ne peut pas généraliser la dénombrabilité de $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/S)$ à des bases de dimensions plus grandes que 1. En effet, on prend une famille $f : \mathcal{X} \to \Delta$ non iso-triviale où Δ est un disque ouvert de $\mathbf{C}$ et on considère la famille de surfaces K3 $f' : \mathcal{X}' := \mathcal{X} \times_\Delta \Delta^2 \to \Delta^2$, plus précisément $f' : \mathcal{X} \times \Delta \to \Delta^2, (x,t) \mapsto (f(x),t)$. On aura $\mathrm{NL}(\mathcal{X}'/\Delta^2) = \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta) \times \Delta$ qui n'est pas dénombrable.

Corollaire 4.1.7 ([Ogu03]). *Soit X_0 une surface K3 et notons $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Def}(X_0)$ la déformation universelle de X_0. Alors, pour tout $0 \leq \rho \leq 20$, l'ensemble des $t \in \mathrm{Def}(X_0)$ tel que $\rho(\mathcal{X}_t) = \rho$ est dense dans $\mathrm{Def}(X_0)$.*

Démonstration. Tout d'abord, puisque pour tout $t \in \mathrm{Def}(X_0)$, la famille $f : \mathcal{X} \to \mathrm{Def}(X_0)$ est aussi universelle pour X_t, la question est donc locale autour de $0 \in \mathrm{Def}(X_0)$. On se donne aussi un marquage τ de sorte qu'on puisse considérer une application des périodes $\mathcal{P} : \mathrm{Def}(X_0) \to \mathcal{D}$. Puisque la question est locale autour de 0, on peut supposer d'après le théorème de Torelli local 2.3.6 que $\mathcal{P}$ est un plongement.

La démonstration se fait par récurrence descendante sur $\rho(X_0)$.

Cas $\rho(X_0) = 20$:

On se donne $x_1, ..., x_{20} \in \Lambda$ une base entière de $\tau_0(\mathrm{NS}(X_0))$ et prend $0 \leq \rho \leq 20$. On veut trouver un $t \in \mathrm{Def}(X_0)$ tel que $\rho(X_t) = \rho$. On prend donc

$$\mathcal{A} := \mathcal{P}^{-1}(\{[x] \in \mathbf{P}(\Lambda_\mathbf{C}) \mid x \cdot x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, \rho\}\})$$

qui est dense dans $\mathrm{Def}(X_0)$ puisque $\mathcal{P}$ est un plongement et que

$$\{[x] \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbf{C}}) \mid x \cdot x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, \rho\}\}$$

est intersection d'hyperplans de $\mathcal{D}$. On considère la famille de surfaces K3 marquée induite par changement de base $g : \mathcal{X}' := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Def}(X_0)} \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ qui est une famille de surfaces K3. Soit $t \in \mathcal{A}$, par construction le point $\mathcal{P}(t) = \tau_t(H^{2,0}(\mathcal{X}_t))$ de $\mathbf{P}(\Lambda_{\mathbf{C}})$ est orthogonal à $x_1, ..., x_\rho$. Mais donc les $x_1, ..., x_\rho$ s'identifient à des classes (1,1) entières de $\mathcal{X}_t$ donc $x_1, ..., x_\rho \in \tau_t(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t))$. Par conséquent, on a l'inclusion $\mathbf{Z}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}x_\rho \subset \tau_t(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t))$ et donc $\rho(\mathcal{X}_t) \geq \rho$.

Maintenant, on considère

$$\mathcal{A}_\rho := \mathcal{A} \setminus \mathcal{P}^{-1}\left(\bigcup_{x \in \Lambda \setminus \oplus_{1 \leq i \leq \rho} \mathbf{Z}x_i} \{[z] \in \mathcal{D}, z \cdot x = 0\} \right)$$

L'application $\mathcal{P}$ est un plongement et $\bigcup_{x \in \Lambda \setminus \oplus_{1 \leq i \leq \rho} \mathbf{Z}x_i} \{[z] \in \mathcal{D}, z \cdot x = 0\}$ est une union dénombrable d'hyperplans, ainsi $\mathcal{A}_\rho$ est non vide et même dense dans $\mathcal{A}$.

Soit $t \in \mathcal{A}_\rho$ et soit $x \in \tau_t(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t))$ alors x est orthogonal à $\mathcal{P}(t)$. Mais donc par construction de $\mathcal{A}_\rho$, on a $x \in \oplus_{1 \leq i \leq \rho} \mathbf{Z}x_i$. On a alors montré que $\tau_t(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t)) = \mathbf{Z}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}x_\rho$. Donc $\mathcal{A}_\rho$ est un ensemble dense de point $t \in \mathcal{A}$ tel que $\rho(\mathcal{X}_t) = \rho$. Mais comme $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathrm{Def}(X_0)$, on a trouvé un ensemble dense de point $t \in \mathrm{Def}(X_0)$ tel que $\rho(\mathcal{X}_t) = \rho$.

Cas $\rho(X_0) < 20$: On suppose que le théorème est vrai pour toute surface X K3 avec $\rho(X) = \rho(X_0) + 1, ..., 20$.

On se donne $x_1, ..., x_{\rho(X_0)} \in \Lambda$ une base entière de $\tau_0(\mathrm{NS}(X_0))$. On prend

$$\mathcal{A} := \mathcal{P}^{-1}(\{[x] \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbf{C}}) \mid x \cdot x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, \rho(X_0)\}\})$$

qui est, comme précédement, dense dans $\mathrm{Def}(X_0)$ puisque $\mathcal{P}$ est un plongement et que $\{[x] \in \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbf{C}}) \mid x \cdot x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, \rho(X_0)\}\}$ est intersection d'hyperplans de $\mathcal{D}$. Soit de plus g la famille de surfaces K3 marquée induite par changement de base $g : \mathcal{X}' := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Def}(X_0)} \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Soit $t \in \mathcal{A}$, les $x_1, ..., x_{\rho(X_0)}$ sont orthogonaux à $\tau_t(H^{2,0}(\mathcal{X}_t))$ par conséquent se sont des classes (1,1) entière de $\mathcal{X}_t$. Ainsi, les $x_1, ..., x_{\rho(X_0)} \in \tau_t(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t))$ et donc $\mathbf{Z}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}x_{\rho(X_0)} \subset \tau_t(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t))$. Donc $\rho(\mathcal{X}_t) \geq \rho(X_0) = \min\{\rho(\mathcal{X}_t), t \in \mathcal{A}\}$. Maintenant, par le théorème de densité du lieu de

Noether-Lefschetz 4.1.5, il existe un $t \in \mathcal{A} \subset \mathrm{Def}(X_0)$ tel que $\rho(\mathcal{X}_t) > \rho(X_0)$. De plus, comme $\mathrm{Def}(X_0)$ est aussi la déformation universelle de $\mathcal{X}_t$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et cela montre que l'ensemble des $t \in \mathrm{Def}(X_t) = \mathrm{Def}(X_0)$ tel que $\rho(\mathcal{X}_t) = \rho$ pour $0 \leq \rho \leq 20$ est dense dans $\mathrm{Def}(X_t) = \mathrm{Def}(X_0)$.

□

4.2 Automorphismes dans les familles de surfaces K3 projectives.

Pour cette partie, je me donne une famille $f : \mathcal{X} \to \Delta$ de surfaces K3 projective avec Δ un petit disque de $\mathbf{C}$. Je note encore $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ le lieu de Noether-Lefschetz de la famille et $\Delta_{\mathrm{gen}} := \Delta \setminus \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ son complémentaire indénombrable et dense dans Δ.

On introduit un marquage $\tau : \mathrm{R}^2 f_* \mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \Lambda \times \Delta$ qui est bien définie puisque Δ est simplement connexe et où Λ est encore une fois le réseau K3. En d'autres termes, on s'est donné une famille d'isométries $\tau_t : H^2(\mathcal{X}_t, \mathbf{Z}) \to \Lambda$ compatibles avec les isométries naturelles entre $H^2(\mathcal{X}_{t_1}, Z) \simeq H^2(\mathcal{X}_{t_2}, Z)$ pour deux fibres $\mathcal{X}_{t_1}, \mathcal{X}_{t_2}$ données par le théorème d'Ehresmann. Enfin puisque la famille est projective on se donne également un fibré f-ample $\mathcal{L}$.

Comme dans la partie précédente sur la densité de $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$, on note $\Lambda_t := \tau_t(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t))$ pour chaque $t \in \Delta$ et pour $t_0 \in \Delta_{\mathrm{gen}}$, on pose $\Lambda_{\mathrm{gen}} := \Lambda_{t_0}$ qui ne dépend pas de t_0 et vérifie $\Lambda_{\mathrm{gen}} \subset \Lambda_t$ pour tout $t \in \Delta$.

Remarquons que la section globale $t \in \Delta \mapsto [\mathcal{L}_t] \in H^2(\mathcal{X}_t, \mathbf{Z})$ est continue comme application de Δ dans $H^2(\mathcal{X}, \mathbf{Z}) \times \Delta$ par définition de la topologie de l'espace total $H^2(\mathcal{X}, \mathbf{Z}) \times S$ associé au système local $\mathrm{R}^2 f_* \mathbf{Z}$. Or $H^2(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$ est muni de la topologie discrète, donc comme Δ est connexe, on a que la classe $[\mathcal{L}_t]$ ne dépend pas de t et donc on note

$$l := \tau_t([\mathcal{L}_t]) \in \Lambda.$$

En particulier, pour tout $t \in \Delta$, $l \in \Lambda_t$ et donc pour $t \in \Delta_{\mathrm{gen}}$, $l \in \Lambda_{\mathrm{gen}}$.

Pour simplifier les notations, on notera

$$A_t := \tau_{t,\mathbf{R}}(\mathrm{Amp}(\mathcal{X}_t))$$

l'image du cone ample de $\mathcal{X}_t$ dans $\Lambda_{\mathbf{R}}$ et

$$A_t^{\mathrm{gen}} := A_t \cap (\Lambda_{\mathrm{gen}} \otimes \mathbf{R})$$

Concernant les notations qu'on vient d'introduire, on a les propriétés suivantes :

Lemme 4.2.1. *Soit $t_0 \in \Delta_{\text{gen}}$, alors pour tout $t \in \Delta$, $A_t^{\text{gen}} \subset A_{t_0}$ et particulier, $A_t = A_{t_0}$ quand $t \in \Delta_0$.*

Démonstration. Si $x \in A_t^{\text{gen}}$ mais que $x \notin A_{t_0}$ c'est à dire que x n'est pas ample pour $\mathcal{X}_{t_0}$, alors il existe nécéssairement une courbe rationnelle C dans $\mathcal{X}_{t_0}$ telle que $x \cdot \tau_{t_0}([C]) \leq 0$. Posons $[D] := \tau_t^{-1} \circ \tau_{t_0}([C])$, et comme les τ_t sont des isométries alors $D^2 = -2$ et donc le théorème de Riemann-Roch pour les K3 2.2.11 nous donne que D^2 est effectif ou anti-effectif. Mais, et c'est là qu'on a besoin d'avoir une classe ample commune l,

$$D \cdot \tau_t^{-1}(l) = \tau_{t_0}(C) \cdot l = C \cdot \tau_{t_0}^{-1}(l) > 0$$

Ainsi, D est une (-2)-courbe effective de $\mathcal{X}_t$ et donc vérifie $0 < x \cdot \tau_t([D]) = x \cdot \tau_{t_0}([C]) \leq 0$ ce qui est absurde. Donc $A_t^{\text{gen}} \subset A_{t_0}$. Pour la seconde assertion, il suffit de remarquer que pour $t \in \Delta_0$, on a $A_t = A_t^{\text{gen}}$ et donc $A_t = A_t^{\text{gen}} \subset A_{t_0}$ comme dans ce cas là t et t_0 joue un rôle symétrique alors l'inclusion inverse vient. □

En conséquence, on notera

$$A_{\text{gen}} := A_{t_0}$$

pour un $t_0 \in \Delta_{\text{gen}}$ et on a démontrer que pour tout $t \in \Delta$, $A_t^{\text{gen}} \subset A_{\text{gen}}$. En d'autres termes, une classe du groupe de Néron-Severi générique qui est ample pour une fibre quelconque est ample pour la fibre générique.

4.2.1 Un sous-groupe des automorphismes commun dans la famille.

Pour ce qui suit on aura besoin d'un lemme de Nikulin sur les sous-réseaux primitifs. Tout d'abord quand $g \in O(\Lambda^0)$ alors on peut considérer une transformation

$$g|_{\Lambda^{0*}/\Lambda^0} : \Lambda^{0*}/\Lambda^0 \to \mathbf{Z}.$$

En effet, on peut voir Λ^{0*} comme l'ensemble des $x \in \Lambda^0_{\mathbf{Q}}$ qui vérifie $(x \cdot y) \in \mathbf{Z}$ pour tout $y \in \Lambda^0$ et donc g induit par extension des scalaires une transformation orthogonale de Λ^{0*} qui passe au quotient pour donner une transformation orthogonale du réseau discriminant Λ^{0*}/Λ^0. Pour plus de détail voir [Huy16] section 14.0.

Lemme 4.2.2 ([Nik80, 1.4 et 1.5]). *Si Λ est un réseau unimodulaire pair et Λ^0 un sous réseau primitif alors*

1. *Si $g \in O(\Lambda^0)$ tel que $g|_{\Lambda^{0*}/\Lambda^0} = \mathrm{Id}$ alors il existe un unique $\tilde{g} \in O(\Lambda)$ vérifiant $\tilde{g}|_{\Lambda^0} = g$ et $\tilde{g}|_{\Lambda^{0\perp}} = Id$.*
2. *A l'inverse, si $\tilde{g} \in O(\Lambda)$ tel que $\tilde{g}(\Lambda^0) = \Lambda^0$ et $\tilde{g}|_{\Lambda^{0\perp}} = \mathrm{Id}$ alors si $g := \tilde{g}|_{\Lambda^0}$ on a $g|_{\Lambda^{0*}/\Lambda^0} = \mathrm{Id}$.*

Démonstration. Notons $M := \Lambda^{0\perp}$, c'est un sous réseau primitif de Λ (les orthogonaux sont toujours primitifs voir [Huy16, Chap 14.0]) et on a la suite d'inclusion :

$$\Lambda^0 \oplus M \hookrightarrow \Lambda = \Lambda^* \hookrightarrow \Lambda^{0*} \oplus M^*$$

Par conséquent, cette suite donne naissance à un sous groupe H du discriminant $A_{\Lambda^0 \oplus A_m} = A_{\Lambda^0} \oplus A_M$ qui correspond à l'image de Λ dans le quotient en question.

Je note $p_1 : A_{\Lambda^0} \oplus A_M \to A_{\Lambda^0}$ et $p_2 : A_{\Lambda^0} \oplus A_M \to A_M$ les deux projections, on a $p_1(H) = A_{\Lambda^0}$ et $p_2(H) = A_M$. En effet, les applications

$$\Lambda^* \to \Lambda^{0*}, \Lambda^* \to M^*$$

sont surjectives. Et donc comme les applications ci-dessus s'identifient aux compositions

$$\Lambda = \Lambda^* \hookrightarrow \Lambda^{0*} \oplus M^* \Lambda^{0*}$$

$$\Lambda = \Lambda^* \hookrightarrow \Lambda^{0*} \oplus M^* \to M,$$

on en déduit que ces compositions sont surjectives et donc on a bien $p_1(H) = A_{\Lambda^0}$ et $p_2(H) = A_M$.

Soit maintenant $[\lambda] \in H$ tel que $p_M([\lambda]) = 0$. Puisque Λ^0 est primitif, on peut completer Λ^0 via un réseau $\Lambda^{0'}$ tel que $\Lambda = \Lambda^0 \oplus \Lambda^{0'}$. De cette manière, on trouve une décomposition $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ où $\Lambda_1 \in \Lambda^0$ et $\lambda_2 \in \Lambda^{0'}$ et la décomposition précédente est unique. Par conséquent, $[\lambda] = [\lambda_2] \in A_{\Lambda^0} \oplus A_M$. Mais alors $0 = p_M([\lambda]) = p_M([\lambda_2])$ donc $[\lambda_2] \in A_{\Lambda^0}$ donc $\lambda_2 \in \Lambda^{0*}$ mais comme λ_2 est entier on a $\lambda_2 \in \Lambda^0$ mais on l'avait pris dans un sous-réseau complémentaire de Λ^0 donc $\lambda_2 = 0$ et donc $\lambda = \lambda_1$ donc $[\lambda] = 0$ et p_M est injectif. Le même raisonnement montre que p_{Λ^0} est injectif.

Plus explicitement, on a un isomorphisme $p_M \circ p_{\Lambda^0}^{-1} : A_{\Lambda^0} \xrightarrow{\sim} A_M, [\lambda] \mapsto [\lambda]$ dont H est le graphe c'est à dire que $H = \{([\lambda], [\lambda]) \in A_{\Lambda^0} \oplus A_M \mid [\lambda] \in \Lambda\}$. D'ailleurs, cet isomorphisme envoie $q_{A_{\Lambda^0}}$ la forme quadratique finie de A_{Λ^0} sur $-q_{A_M}$ l'opposé de la forme quadratique finie de A_M (pour plus de détails

sur les formes quadratiques finies associées au discriminant des réseaux voir [Huy16] ou [Nik80]).

Pour voir 1., il suffit de voir que si $g \in O(\Lambda^0)$ alors $g \oplus \mathrm{Id}_M$ induit une transformation orthogonale de $A_{\Lambda^0} \oplus A_M$ étant $g|_{\Lambda^{0*}/\Lambda^0} = \mathrm{Id}$ sur A_{Λ^0} et Id sur A_M. Donc $(g|_{\Lambda^{0*}/\Lambda^0} \oplus \mathrm{Id})([\lambda]) = (\mathrm{Id} \oplus \mathrm{Id})([\lambda]) = [\lambda]$. Donc

$$(g \oplus \mathrm{Id}_M)(\lambda) \in \lambda + \Lambda^0 \oplus M \subset \Lambda$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$ et ainsi $g \oplus \mathrm{Id}_M$ se restreint en une transformation orthogonale de Λ, on note donc $\tilde{g} = (g \oplus \mathrm{Id}_M)|_\Lambda \in O(\Lambda)$ et on a $\tilde{g}|_{\Lambda^0} = g \in O(\Lambda^0)$ et $\tilde{g}|_M = \mathrm{Id}$. De plus l'unicité de $\tilde{g}$ découle du fait que Λ^0 et $M = \Lambda^{0\perp}$ sont en somme directe et que $\Lambda^0 \oplus M$ est d'indice fini dans Λ.

Et pour montrer 2., on se donne $\tilde{g} \in O(\Lambda)$ tel que $\tilde{g}(\Lambda^0) = \Lambda^0$ et $\tilde{g}|_{\Lambda^{0\perp}} = \mathrm{Id}$ et on note $g := \tilde{g}|_{\Lambda^0}$. Au vu de la construction de $\tilde{g}|_{A_{\Lambda^0} \oplus A_M}$ par extension des scalaires puis restriction et passage au quotient, l'application $\tilde{g}|_{A_{\Lambda^0} \oplus A_M}$ agit comme Id sur A_M et donc d'après la description de H comme le graphe de $p_M \circ p_{\Lambda^0}^{-1}$, $\tilde{g}|_{A_{\Lambda^0} \oplus A_M}$ agit comme l'identité sur H et donc sur A_{Λ^0}.

□

Soit maintenant

$$G_t := \{g \in O(\Lambda_{\mathrm{gen}}) \mid g|_{{\Lambda_{\mathrm{gen}}}^*/\Lambda_{\mathrm{gen}}} = \mathrm{Id} \text{ et } g(l) \in A_t^{\mathrm{gen}}\}$$

seulement la deuxième condition dépend de t par conséquent, comme on a vu que $A_t^{\mathrm{gen}} = A_{\mathrm{gen}}$ pour tout $t_0 \in \Delta_{\mathrm{gen}}$, on peut poser que $G_{\mathrm{gen}} := G_{t_0}$ pour de tels t_0. Grâce à cette description on voit que $G_t \subset G_{\mathrm{gen}}$ pour tout $t \in \Delta$.

Le but de ce paragraphe sera de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2.3 ([Ogu03]). *Il existe une partie finie du lieu de Noether-Lefschetz $\mathcal{F} \subset \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ tel que pour tout $t \in \Delta \setminus \mathcal{F}$,*

$$G_{\mathrm{gen}} < \mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)$$

et quand $t \in \Delta_{\mathrm{gen}}$,

$$[\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t) : G_{\mathrm{gen}}] \leq 66$$

Démonstration. Les points 1. et 2. du lemme précédent montre que

$$\{\tilde{g} \in O(\Lambda) \mid \tilde{g}(\Lambda_{\mathrm{gen}}) = \Lambda_{\mathrm{gen}}, \tilde{g}|_{{\Lambda_{\mathrm{gen}}}^\perp} = \mathrm{Id} \text{ et } \tilde{g}(l) \in A_t^{\mathrm{gen}}\} \xrightarrow{\sim} G_t, \tilde{g} \mapsto \tilde{g}|_{\Lambda_{\mathrm{gen}}}$$

Mais $\tau_t(T(\mathcal{X}_t)) = \tau_t(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t)^\perp) \subset (\Lambda_{\mathrm{gen}})^\perp$ donc tout $g \in G_t$ correspond via l'isomorphisme du dessus à $\tilde{g}$ qui est l'identité sur $\tau_t(T(\mathcal{X}_t))$ donc donne une isométrie de $H^2(\mathcal{X}_t, \mathbf{C})$. Celle-ci est l'identité sur $H^{2,0}(\mathcal{X}_t) \oplus H^{0,2}(\mathcal{X}_t)$, donc pour qu'elle donne une isométrie de Hodge il suffirait de voir que $\tilde{g}_{\mathbf{C}}$ laisse stable $\tau_{t,\mathbf{C}}(H^{1,1}(\mathcal{X}_t))$. Mais c'est le cas car $\tilde{g}$ est une isométrie donc envoie $\tau_{t,\mathbf{C}}(H^{1,1}(\mathcal{X}_t)) = \tau_{t,\mathbf{C}}((H^{2,0}(\mathcal{X}_t) \oplus H^{0,2}(\mathcal{X}_t)))^\perp$ dans lui même. Donc $\tilde{g}$ est une isométrie de Hodge.

La condition $\tilde{g}(l) \in A_t^{\mathrm{gen}}$ montre que c'est une isométrie de Hodge qui préserve le cône ample de $\mathcal{X}_t$ et donc se relève via un unique automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)$ tel que $\tau_t \circ \varphi^* \circ \tau_t^{-1} = \tilde{g}$ par le théorème de Torelli global 2.3.7. Ainsi, on obtient une autre descpription de G_t :

$$G_t \simeq \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t) \mid \varphi^*(\tau_t^{-1}(\Lambda_{\mathrm{gen}})) = \tau_t^{-1}(\Lambda_{\mathrm{gen}}),\ \varphi^*|_{\tau_t^{-1}({\Lambda_{\mathrm{gen}}}^\perp)} = \mathrm{Id}\}$$

si j'identifie l'action de φ^* sur $H^2(\mathcal{X}_t, \mathbf{Z})$ à son action sur Λ via τ_t alors on peut écrire :

$$G_t \simeq \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t) \mid \varphi^*(\Lambda_{\mathrm{gen}}) = \Lambda_{\mathrm{gen}},\ \varphi^*|_{(\Lambda_{\mathrm{gen}})^\perp} = \mathrm{Id}\}$$

Avec cette description, on peut tout de suite démontrer le fait que $[\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t) : G_{\mathrm{gen}}] \leq 66$ pour tout $t \in \Delta_{\mathrm{gen}}$. En effet, pour $t \in \Delta_{\mathrm{gen}}$, $\Lambda_{\mathrm{gen}} = \tau_t(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t))$, mais alors comme $\varphi^*(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t)) = \mathrm{NS}(\mathcal{X}_t)$ alors la condition $\varphi^*(\Lambda_{\mathrm{gen}}) = \Lambda_{\mathrm{gen}}$ est automatique. Par ailleurs, $\tau_t^{-1}({\Lambda_{\mathrm{gen}}}^\perp) = T(\mathcal{X}_t) := \mathrm{NS}(\mathcal{X}_t)^\perp$ qui est la plus petite structure de Hodge contenant $H^{2,0}(\mathcal{X}_t)$ par [Huy16, Lem 3.3.1], or d'après [Huy16, Rmq 15.1.2], les automorphismes φ vérifiant $\varphi^*|_{T(\mathcal{X}_t)} = \mathrm{Id}$ sont exactement les automorphismes symplectiques (ie ceux vérifiant $\varphi^*|_{H^{2,0}(\mathcal{X}_t)} = \mathrm{Id}$). Donc pour tout $t \in \Delta_{\mathrm{gen}}$, $G_{\mathrm{gen}} \simeq \mathrm{Aut}_s(\mathcal{X}_t)$ qui est d'indice ≤ 66 par [Huy16, Coro 15.1.14].

On va maintenant démontrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ définit par

$$\mathcal{F} := \{t \in S \mid G_{\mathrm{gen}} \not\subset G_t\}$$

est fini. Pour cela on va utiliser la réduction suivante : G_{gen} est un groupe engendré par un nombre fini d'éléments, en effet le groupe d'automorphisme symplectique d'une surface K3 est de type fini voir [Deb19, Prop 5.19]. Notons $\mathrm{Gen}(G_{\mathrm{gen}})$ un ensemble fini de générateur de G_{gen}. On a donc

$$\mathcal{F} = \bigcup_{g \in \mathrm{Gen}(G_{\mathrm{gen}})} \{t \in \Delta \mid g \notin G_t\}$$

Donc il suffit de se donner un $g \in \mathrm{Gen}(G_{\mathrm{gen}})$ et de montrer qu'il existe un nombre fini de $t \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ tel que $g \notin G_t$. Soit t un tel élément de Δ, alors $g(l) \notin A_t$ donc il existe une (-2)-courbe $C_t \subset \mathcal{X}_t$ vérifiant $\tau_t([C_t]) \cdot g(l) \leq 0$. Mais $g(l)^2 = l^2 > 0$ et $g(l) \cdot l > 0$ puisque $g(l) \in A_{t_0}$ donc $g(l) \in \Lambda_{\mathrm{gen}} \subset \Lambda_t$ est dans le cône positif de $\mathcal{X}_t$ mais alors le théorème de Riemann-Roch dit que $g(l)$ correspond à la classe d'un diviseur effectif $[D]$ de $\mathcal{X}_t$, plus précisement $\tau_t([D]) = g(l)$.

Mais de même que précédement, on peut utiliser le 1. du lemme ci-dessus, on trouve $\tilde{g} \in O(\Lambda)$ telle que $\tilde{g}|_{\Lambda^0} = g$ et c'est une isométrie de Hodge de $H^2(\mathcal{X}_t, \mathbf{Z})$. Donc on pose $\tau_t([E_t]) := \tilde{g}^{-1}(\tau_t([C_t]))$ et c'est une classe entière de $\mathrm{NS}(\mathcal{X}_t)$ vérifiant $E_t^2 = -2$ donc E_t est effectif ou anti-effectif par Riemann-Roch mais comme par hypothèse $\tau_t([E_t]) \cdot l = \tau_t([C_t]) \cdot g(l) \leq 0$ alors on a plutôt $\tau_t([E_t]) \cdot l < 0$ puisque l est ample et que donc $\tau_t([E_t]) \cdot l \neq 0$. Par conséquent, $\tau_t([C_t]) \cdot g(l) < 0$ et comme C_t qui est irréductible se trouve nécessairement dans le support de D et donc $l \cdot C_t \leq l \cdot D = l \cdot g(l)$ qui ne dépend pas de t.

Mais une telle courbe $C_t \subset \mathcal{X}_t$ a pour polynôme de Hilbert

$$P_{C_t}(m) = (l \cdot C_t)m + 1 + p_a(C_t) = (l \cdot C_t)m + 1$$

puisque $C_t \simeq \mathbf{P}^1$. Mais on a borné $(l \cdot C_t)$ par $l \cdot g(l)$ et $0 \leq l \cdot C_t$ puisque l est ample. De plus, ces bornes sont indépendantes de t donc si on a une infinité de tels points $t \in \Delta$ avec $g \notin G_t$ alors on trouve une infinité de courbes C_t ayant le même polynôme de Hilbert. Gardons seulement l'infinité de t telle que les C_t ont toutes le même polynôme de Hilbert $P(m) = a_1 m + 1$, elles se trouvent donc toutes dans le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}_P(\mathcal{X}/\Delta)$ paramétrisant les sous variétés ayant P pour polynôme de Hilbert. Puisque $\mathrm{Hilb}_P(\mathcal{X}/\Delta)$ est projectif (en particulier noetherien), il a un nombre fini de composantes irreductibles et par conséquent l'une d'entre elles, disons H, contient une infinité de points correspondant à des courbes C_t du dessus.

Le morphisme $H \to \Delta$ est propre et son image contient une infinité de points. Ainsi, puisque Δ est de dimension 1, le morphisme $h \to \Delta$ est surjectif. On trouve donc une courbe $C_{t_0} \subset \mathcal{X}_{t_0}$ au dessus en t_0. En particulier, puisque la classe d'homologie des courbes paramétrées par H est constante, on a $\tau_{t_0}([C_{t_0}]) = \tau_t([C_t])$ pour un t avec $g \notin G_t$. Par conséquent $[C_{t_0}] \cdot g(l) = [C_t] \cdot g(l) < 0$. Mais c'est absurde puisque $g(l) \in A_{t_0}$. Ainsi, il n'y a qu'un nombre fini de point $t \in \Delta$ vérifiant $g \in G_t$. On trouve donc bien que

l'ensemble

$$\mathcal{F} = \bigcup_{g \in \mathrm{Gen}(G_{\mathrm{gen}})} \{t \in \Delta \mid g \notin G_t\}$$

est une union fini d'ensemble fini et est donc lui-même fini.

Les propriétés du schémas de Hilbert que j'ai utilisées se trouvent dans [Kol95] chapitre 1.

Fin de la preuve du théorème. □

Remarque 4.2.4. J'aimerai attirer l'attention du lecteur sur le fait que pour un $t \in \Delta_{\mathrm{gen}}$ alors la borne du théorème précédent pour $[\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t) : G_{\mathrm{gen}}]$ trouvée dans ce document est 66. En revanche, dans son article [Ogu03], Oguiso trouve une borne N dépendant de la famille $f : \mathcal{X} \to \Delta$, la borne calculé plus haut retire donc cette dépendance.

4.2.2 Un théorème de densité d'Oguiso

Je vais maintenant présenter la démonstration d'un théorème de densité d'Oguiso [Ogu03, Thm III.3]. Posons

$$\mathcal{D} := \{t \in \Delta \mid |\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)| = \infty\}$$

Le théorème affirme que $\mathcal{D}$ est dense dans Δ et je suivrais la démonstration d'Oguiso [Ogu03, Thm 1.5 (3)].

Nous aurons d'abord besoin d'un lemme concernant les réseaux.

Lemme 4.2.5. *Soit Λ le réseau K3 et $L := \mathbf{Z}l \oplus \mathbf{Z}a$ un sous réseau primitif de rang 2 avec $l^2 > 0$. Alors il existe un $h \in \Lambda$ ayant la propriété que pour tout entier n_0, il existe $n \geq n_0$ tel que $\mathbf{Z}l \oplus \mathbf{Z}(an + h)$ est un sous réseau primitif de Λ qui ne contient aucune -2 ou 0 classes.*

Démonstration. Soit trois U le réseau hyperbolique et on note de plus $(e_i, f_i)_{i=1,2,3}$ les éléments de la base canonique de $U^{\oplus 3}$. On a un plongement

$$\begin{array}{ccc} L & \hookrightarrow & U^{\oplus 3} \\ l & \mapsto & e_1 + \frac{1}{2}(l \cdot l) f_1 \\ a & \mapsto & e_2 + \frac{1}{2}(a \cdot a) f_2 + (l \cdot a) f_1 \end{array}$$

On vérifie bien que c'est un plongement primitif puisque la matrice associé

à ce morphisme est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(l\cdot l) & (l\cdot a) \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}(a\cdot a) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on peut calculer que c'est une matrice injective de conoyau libre.

Posons comme le suggère Oguiso $A := \frac{l^2}{2}, B := (l\cdot a), C := \frac{a^2}{2}$. La composition suivante est donc un plongement primitf

$$L \hookrightarrow U^{\oplus 3} \hookrightarrow \Lambda = U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)$$

mais le plongement primitif $L \hookrightarrow \Lambda$ est unique à automorphisme de Λ près. Ainsi, quitte à composer par un automorphisme de Λ, on peut supposer que

$$l = e_1 + Af_1,\ a = Bf_1 + e_2 + Cf_2$$

Soit $m \geq 1$ et $h := e_3 - mf_3$, on a $h^2 = e_3 - 2me_3\cdot f_3 + f_3^2 = -2m$ et $h\cdot l = h\cdot a = 0$. On souhaite maintenant trouver les bons n, m pour que

$$L_{m,n} := \mathbf{Z}l \oplus \mathbf{Z}(na + h)$$

vérifie les propriétés voulues quand il est muni de la forme quadratique

$$q_{n,m}(x,y) := 2(Ax^2 + nBxy + (n^2C - m)y^2).$$

On vérifie que $L_{m,n}$ est primitif dans Λ puisque son plongement dans $U^{\oplus 3}$ est donné par la matrice injective et de conoyau libre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & nB \\ 0 & n \\ 0 & nC \\ 0 & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

et que les formes quadratiques sont compatible puisque

$$l^2 = 2A = q(1,0)$$

$$(na+h)^2 = n^2a^2 + h^2 = 2n^2C - 2m = q(0,1).$$

Nous allons séparer les cas selon la valeur de $A = \frac{l^2}{2}$.

Dans le cas où $A \geq 2$: On cherche n, m de la forme $n = AN$ et $m = AM$ où N, M sont des entiers convenables qu'il va falloir déterminer. On a maintenant

$$q_{n,m}(x,y) = 2Ax^2 + 2ABNxy + 2A(ACN^2 - M)y^2$$

Et donc $q(x,y)$ est divisible par $2A \geq 4$ et donc il n'existe pas de x, y tels que $q_{n,m}(x,y) = -2$.

De plus, le discriminant de $q_{n,m}$ est

$$d_{N,M} := (2ABN)^2 - 4 \cdot 2A \cdot 2A(ACN^2 - M) = 4A^2N^2(B^2 - 4AC) + 4M$$

Et ce n'est pas un carré si M est général. En effet, si $d_{N,M}$ est un carré $\neq 0$ alors le réseau $L_{n,m+A}$ admet pour déterminant $d_{N,M+1} = d_{N,M} + 4$ mais la distance entre deux carré non nul est strictement supérieure à 4 donc $d_{N,M+1}$ n'est pas un carré. Sinon si $d_{N,M} = 0$ alors le réseau $L_{n,m+2A}$ admet pour déterminant $d_{N,M+2} = d_{N,M} + 8 = 8$ qui n'est pas un carré. On a donc trouvé une infinité de réseau $L_{n,m}$ sans classe (-2) ou 0 pour des valeurs de n arbitrairement grande de la forme $n = l^2N$.

Dans le cas où $A = 1$: On cherche n, m de la forme $n = 4N$ et $m = 8M$ où N, M sont des entiers convenables qu'il va falloir déterminer. la forme quadratique de $L_{n,m}$ s'écrit maintenant

$$q_{n,m}(x,y) = 2x^2 + 8NBxy + 8(4N^2C - M)y^2.$$

On voit que modulo 8, la forme quadratique est $q_{n,m}(x,y) = 2x^2[8]$ mais pour aucune valeur de x possible $2x^2 = -2[8]$. Ainsi -2 n'est pas dans l'image de $q_{n,m}$.

De plus, le discriminant de $q_{n,m}$ est

$$d_{N,M} := (8NB)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8(4N^2C - M) = 64(N^2(B^2 - 4C) + M)$$

Et ce n'est pas un carré pour un M général. En effet, si $d_{N,M}$ est un carré alors $N^2(B^2 - 4C) + M$ est aussi un carré mais donc $N^2(B^2 - 4C) + M + 1$ n'en est pas un et donc $d_{N,M+1}$ n'est pas un carré non plus. On a donc trouvé une infinité de réseau $L_{n,m}$ sans classe (-2) ou 0 pour des valeurs de n arbitrairement grande de la forme $n = 4N$. □

Notons à partir de maintenant $r_{\text{gen}} := \text{rg}(\Lambda_{\text{gen}})$.

On aura besoin du lemme suivant qui a pour but de traiter le premier des deux cas de la preuve du théorème de densité d'Oguiso 4.2.11.

Lemme 4.2.6. *Si $r_{\text{gen}} = 1$ et pour tout $t \in \text{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$, on a $\text{rg}(\Lambda_t) = 2$ alors il existe un $t \in \text{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ tel que $|\text{Aut}(\mathcal{X}_t)| = \infty$.*

Démonstration. Soit $t \in \text{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$, on a que $|\text{Aut}(\mathcal{X}_t)| < \infty$ et équivalent au fait que $\overline{\text{NE}}(\mathcal{X}_t)$ est rationnellement polyédral grâce à [Huy16, Coro 8.4.7]. Mais d'après la classification de Kovács 3.4.1, le cône $\overline{\text{NE}}(\mathcal{X}_t)$ est rationnellement polyédral dans les cas $(ii), (iii)$ et (iv) c'est à dire quand $\mathcal{X}_t$ possède des (-2)-courbes ou des courbes elliptiques. Par conséquent, le groupe $\text{Aut}(\mathcal{X}_t)$ est infini si et seulement si $\mathcal{X}_t$ ne possède ni (-2)-courbes ni courbe elliptiques et d'après 3.2.5 c'est équivalent au fait que $\text{NS}(\mathcal{X}_t)$ ne possède ni classe entière de carré -2 ni classe entière de carré 0.

Soit $\mathcal{P} : \Delta \to \mathbf{P}(\Lambda_{\mathbf{C}}), t \mapsto \tau_t(H^{2,0}(\mathcal{X}_t))$ l'application des périodes locale. Rappelons qu'on s'est donné au début de la section 4.2 une classe ample commune $l \in \Lambda$ à toutes les fibres $\mathcal{X}_t$. Par conséquent, l'application $\mathcal{P}$ est à valeurs dans $\mathbf{P}(l^{\perp})$ puisque $l \in \tau_t(H^{1,1}(\mathcal{X}_t))$ qui est orthogonal à $\tau_t(H^{2,0}(\mathcal{X}_t))$ pour tout $t \in \Delta$.

Si on prend $t \in \text{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$, alors par hypothèse $\text{rg}(\Lambda_t) = 2$ donc il existe $a \in \Lambda \setminus \mathbf{Z}l$ tel que $\mathcal{P}(t) \perp a$ et $\Lambda_t = \mathbf{Z}l \oplus \mathbf{Z}a$.

Si Λ_t n'a pas de -2, 0 classes alors on a trouvé le $t \in \text{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ voulu. Sinon, d'après le lemme précédent 4.2.5 on a $h \in \Lambda$ et n arbitrairement grand tel que $\mathbf{Z}l \oplus \mathbf{Z}(na + h) \hookrightarrow$ est un sous réseau primitif sans -2 et sans 0 classes. De plus, quand n est très grand, l'hyperplan $\mathbf{P}((na + h)^{\perp}) = \mathbf{P}((a + \frac{h}{n})^{\perp})$ est arbitrairement proche de $\mathbf{P}(a^{\perp})$. Mais $\mathcal{P}(\Delta) \cap \mathbf{P}(a^{\perp}) \neq \emptyset$ donc il existe un n suffisament grand et un $t' \in \Delta$ tel que $\mathcal{P}(t') \in \mathbf{P}((na + h)^{\perp})$ et le réseau $\mathbf{Z}l \oplus \mathbf{Z}(na + h)$ n'admet ni -2 ni 0 classes.

Ainsi $l, na + h \in H^{1,1}(\mathcal{X}_{t'})$ et sont entières donc le théorème de Lefschetz sur les classes (1,1) dit que $l, na + h \in \Lambda_{t'}$ mais donc $\mathbf{Z}l \oplus \mathbf{Z}(na + h) \subset \Lambda_{t'}$. Mais par hypothèse les seules fibres avec un rang de Picard plus grand ou égal à 2 sont les fibres des points de $\text{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ et elles ont un rang de Picard exactement égal à 2, donc $\mathbf{Z}l \oplus \mathbf{Z}(na + h) = \Lambda_{t'}$. Donc $\text{NS}(\mathcal{X}_{t'})$ n'admet ni -2 classes ni 0 classes. □

Nous aurons encore besoin de deux lemmes supplémentaires :

Lemme 4.2.7. *Soit une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ de point de Δ convergeant vers $t_0 \in \Delta$*

et telle que $\mathrm{rg}(\mathcal{X}_{t_n}) =: \rho$ *est constant. Supposons que*

1. *pour tout* $n \geq 1$*, le nombre de (-2)-courbes* $C_{n,1}, ...C_{n,k}$ *de* $\mathcal{X}_{t_n}$ *est constant égal à* k*.*
2. *les nombres d'intersections* $(C_{n,i} \cdot C_{n,j})$ *sont indépendants de n.*
3. *pour tout* $i = 1, ..., k$*, la suite* $(l \cdot C_{n,i})_{n\geq 1}$ *est bornée.*

Alors $\rho(\mathcal{X}_{t_0}) \geq \rho$*.*

Démonstration. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que, pour tout $i = 1, \dots, k$, le polynôme de Hilbert de $C_{n,i}$ est indépendant de n. En effet, comme $C_{n,i} \simeq \mathbf{P}^1$, on a

$$P_{C_{n,i}}(m) = \chi(\mathcal{O}_{C_{n,i}}(ml)) = (l \cdot C_{n,i})m + 1,$$

De plus $l \cdot C_{n,i} > 0$, et l'hypothèse 3 dit qu'il existe un N_i tel que $l \cdot C_{n,i} \leq N_i$. On a donc un nombre fini de possibilités pour les polynômes de Hilbert. Ainsi, pour tout $i = 1, ..., k$, on trouve un polynôme P_i qui est le polynôme de Hilbert d'un nombre infini de courbe $C_{n,i}$.

On considère alors

$$\mathcal{H} = \mathrm{Hilb}_{P_1}(\mathcal{X}/\Delta) \times_\Delta \cdots \times_\Delta \mathrm{Hilb}_{P_k}(\mathcal{X}/\Delta).$$

Puisque ce schéma est projectif, il a un nombre fini de composante irréductible. De plus, pour tout n, le k-uplet $(C_{n,1}, \dots, C_{n,k})$ définit un point $h_n \in \mathcal{H}$ au-dessus de t_n. Une composante irréductible H de $\mathcal{H}$ doit donc contenir une infinité de ces points. Ainsi le morphisme $H \to \Delta$, qui est propre, contient une infinité de point dans son image. Par conséquent le morphisme est surjectif. Le morphisme $H \to \Delta$ est même de degrès 1 puisque quitte à rapetissir $\Delta \subset \mathbf{C}$, on peut supposer que Δ est simplement connexe.

On peut donc choisir un point $h_0 \in H$ au-dessus de t_0. Il correspond à un k-uplet de courbes $(C_{0,1}, \dots, C_{0,k})$ sur $\mathcal{X}_{t_0}$. Et de plus quand h varie dans H alors il correspond à une courbe C_h et sa classe d'homologie $[C_h] \in \Lambda$ est constante par rapport à h. Par conséquent, le k-uplet de classes $([C_{0,1}], \dots, [C_{0,k}])$ des courbes trouvées au dessus de t_0 est égal à $([C_{n,1}], \dots, [C_{n,k}])$ pour un n assez grand. En particulier, on a $C_{0,i} \cdot C_{0,j} = C_{n,i} \cdot C_{n,j}$ pour tout $i, j = 1, ..., k$.

Soit $n \geq 1$, on déduit de ce qui précède que la matrice de Gram des $C_{n,1}, ..., C_{n,k}$ est identique à la matrice de Gram des $C_{0,1}, ..., C_{0,k}$. Ainsi, comme on trouve $\rho = \mathrm{rg}(\mathrm{NS}(X_{t_n}))$ courbes parmis les $C_{n,1}, ..., C_{n,k}$ qui sont linéairement indépendantes dans $\mathrm{NS}(X_{t_n})$ alors parmis les $C_{0,1}, ..., C_{0,k}$, on trouve ρ courbes linéairement indépendantes dans $\mathrm{NS}(X_{t_0})$. Par conséquent, $\rho(X_{t_0}) = \mathrm{rg}(\mathrm{NS}(X_{t_0})) \geq \rho$. □

J'aurai besoin, pour le lemme suivant, de la notion de fibration jacobienne d'une surface K3 elliptique pour laquelle je renvoie le lecteur à [Huy16, Section 11.4] pour plus de détails.

Lemme 4.2.8. *Soit $\varphi : X \to \mathbf{P}^1$ une surface K3 elliptique et $\mathrm{J}X \to \mathbf{P}^1$ la fibration jacobienne associée. Si t est une translation de $\mathrm{J}X$ (ie un automorphisme de la même forme que [Huy16, Def 15.4.2]) alors t induit un automorphisme $\tilde{t}$ de X et l'opération $t \mapsto \tilde{t}$ est injective.*

Démonstration. Soit H un fibré en droites très ample de X. On sait d'après [Har77, Coro II.8.18] que la condition pour une section hyperplane $C \in |H|$ d'être lisse et irréductible est une condition Zariski-ouverte dans $|H|$. Si une telle courbe C contient une composante irréductible Γ d'une fibre de φ alors $C = \Gamma$ puisque C est irréductible. Mais comme H est très ample, on a $C \cdot \Gamma > 0$. Or $C \cdot \Gamma = \Gamma^2 \leq 0$ d'après [Huy16, Coro 11.1.7] donc C ne peut pas contenir de composante de fibre de φ.

Soit donc une section hyperplane générale $C \in |H|$, elle ne coupe qu'en un nombre fini de points les fibres de φ et donc la restriction $\varphi_C := \varphi|_C : C \to \mathbf{P}^1$ est un revêtement ramifié de $\mathbf{P}^1$. Il y a un nombre fini de fibre singulière de φ donc de même, la condition que $\varphi_C : C \to \mathbf{P}^1$ soit branché en des points de $\mathbf{P}^1$ distinct de ceux où $\varphi : X \to \mathbf{P}^1$ admet une fibre singulière est une condition Zariski-ouverte dans $|H|$. Ainsi, on peut supposer quitte à prendre une section hyperplane plus générale que φ_C est branché en des points de $\mathbf{P}^1$ distincts de ceux où φ admet une fibre singulière.

D'après [DP, Thm 3.7], il existe

$$C' \to C \xrightarrow{\varphi_C} \mathbf{P}^1$$

un revêtement ramifié non trivial de $\mathbf{P}^1$ tel que $C' \to \mathbf{P}^1$ est galoisien et donc il existe un groupe G non trivial agissant sur C' et avec $C'/G \simeq \mathbf{P}^1$. De plus, le lieu de branchement de $C' \to \mathbf{P}^1$ est exactement le lieu de branchement de $C \to \mathbf{P}^1$.

Pour simplifier, je noterai $C = C'$ ce qui ne changera pas la suite. On considère maintenant le changement de base $X_C = X \times_{\mathbf{P}^1} C$ qui est lisse puisque $C \to \mathbf{P}^1$ est ramifié en dehors du lieu de branchement de $\varphi : X \to \mathbf{P}^1$. On considère également la fibration elliptique $X_C \to C$. Cette fibration elliptique admet une section s qu'on construit via les morphismes $C \to X$ et $C \xrightarrow{\mathrm{Id}} C$.

De plus, puisque G agit sur C alors G agit sur $X \times C$ comme l'identité sur

le premier facteur. Mais de plus, on a

$$X \times_{\mathbf{P}^1} C = \{(x, b) \in X \times C \mid \varphi(x) = \varphi_C(b)\}$$

et donc si $(x, b) \in X \times_{\mathbf{P}^1} C$ alors pour $g \in G$, on a $\varphi(x) = \varphi_C(b) = \varphi_C(g(b))$ puisque G agit sur les fibres de φ_C et donc $(x, g(b)) \in X \times_{\mathbf{P}^1} C$. Ainsi, G agit sur X_C et plus précisement sur les fibres de $X_C \to C$ et on a en plus

$$X_C/G = (X \times_{\mathbf{P}^1} C)/G \simeq X \times_{\mathbf{P}^1} \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^1.$$

Remarquons maintenant que puisque $X_C \to C$ est une fibration elliptique avec une section s alors, d'après [Ven84, Prop V.9.1], on a un isomorphisme qui préserve les fibres $\psi_s : X_C \xrightarrow{\sim} \mathrm{J}(X_C)$. Cet isomorphisme est donné par $x \mapsto \mathcal{O}_{(X_C)_b}([x] - [s(b)])$ quand $x \in \varphi_C^{-1}(b)$ et est compatible avec le morphisme vers C.

De la même façon que pour X_C, le groupe G agit sur $\mathrm{J}(X_C) = \mathrm{J}(X) \times_{\mathbf{P}^1} C$ en agissant sur le deuxième facteur.

On se donne une translation t de la fibration jacobienne $\mathrm{J}(X_C) \to C$. Alors on peut construire t_C un automorphisme de $\mathrm{J}(X_C) \to C$ qui est de la forme $t_C(x, b) = (t(x), b)$ pour $(x, b) \in \mathrm{J}(X_C) = \mathrm{J}(X) \times_{\mathbf{P}^1} C$. On définit alors $\tilde{t_C} := \psi_s^{-1} \circ t_C \circ \psi_s$ qui est un automorphisme de X_C et qui préserve les fibres de $X_C \to C$.

Soit maintenant $g \in G$ et montrons que $\tilde{t_C} \circ g = g \circ \tilde{t_C}$. Dans un premier temps, on remarque que $g \cdot s := g \circ s \circ g^{-1}$ est une section de $X_C \to C$. En effet, l'application $X_C \to C$ est la projection selon la deuxième coordonnée et G n'agit que sur la deuxième coordonnée. On peut donc considérer $\psi_{g\cdot s} : X_C \xrightarrow{\sim} \mathrm{J}(X_C)$ l'isomorphisme associé à la section $g \cdot s$. Sur la fibre en b, pour $z = (x, b)$, on a

$$\begin{aligned} \psi_{g\cdot s}(z) &= \mathcal{O}_{(X_C)_b}([(x, b)] - [g \cdot s(b)]) \\ &= \mathcal{O}_{(X_C)_b}([(x, b)] - [s(b)]) \otimes \mathcal{O}_{(X_C)_b}([s(b)] - [g \cdot s(b)]). \end{aligned}$$

Ainsi, si on note τ la translation de $\mathrm{J}(X_C)$ qui consiste sur chaque fibre $(X_C)_b$ à tensoriser par $\mathcal{O}_{(X_C)_b}([s(b)] - [g \cdot s(b)])$ alors on a $\psi_{g\cdot s} = \tau \circ \psi_s$. De plus, en tant que translation, l'automorphisme τ commute avec t_C sur la fibre générale puisque ce sont des translations de groupe abélien.

Dans un second temps, on a $g \circ \psi_s \circ g^{-1} = \psi_{g\cdot s}$. Pour cela rappelons que l'isomorphisme entre $\mathrm{J}(X)_C$ et $\mathrm{J}(X_C)$ est donné par

$$\mathcal{O}_{X_{\varphi(b)}}\left(\sum n_i [x_i]\right) \mapsto \mathcal{O}_{(X_C)_b}\left(\sum n_i [(x_i, b)]\right).$$

Par conséquent, l'action de G sur $\mathrm{J}(X_C)$ se décrit via

$$g \cdot \mathcal{O}_{(X_C)_b}\left(\sum n_i[x_i]\right) = \mathcal{O}_{(X_C)_b}\left(\sum n_i[(x_i, g(b))]\right).$$

Ainsi, pour $z = (x, b) \in X_C$, on a $g^{-1} \cdot z = (x, g^{-1}(b))$ mais alors

$$\psi_s(g^{-1} \cdot z) = \mathcal{O}_{(X_C)_{g^{-1}(b)}}([(x, g^{-1}(b))] - [s(g^{-1}(b))])$$

et donc

$$g \cdot \psi_s(g^{-1} \cdot z) = \mathcal{O}_{(X_C)_b}([(x, b)] - [g \circ s \circ g^{-1}(b)]) = \psi_{g \cdot s}(z).$$

On a donc bien $g \circ \psi_s \circ g^{-1} = \psi_{g \cdot s}$.
En combinant les deux points précédents, on obtient

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ \tilde{t_C} \circ g &= g^{-1} \circ \psi_s^{-1} \circ t_C \circ \psi_s \circ g \\ &= (g^{-1} \circ \psi_s^{-1} \circ g) \circ (g^{-1} \circ t_C \circ g) \circ (g^{-1} \circ \psi_s \circ g) \\ &= \psi_{g \cdot s}^{-1} \circ t_C \circ \psi_{g \cdot s} \\ &= \psi_s^{-1} \circ \tau^{-1} \circ t_C \circ \tau \circ \psi_s \\ &= \psi_s^{-1} \circ t_C \circ \psi_s = \tilde{t_C}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'automorphisme $\tilde{t_C}$ commute avec l'action de G et donc il passe au quotient par G et donne naissance à un automorphisme $\tilde{t}$ de $X_C/G \simeq X$.

Enfin, si t et t' sont deux translations de $\mathrm{J}(X)$ telles que $\tilde{t} = \tilde{t'}$ alors on a $\psi_s^{-1} \circ t_C \circ \psi_s = \psi_s^{-1} \circ t'_C \circ \psi_s$ et donc $t_C = t'_C$. Mais comme t_C et t'_C sont des translations de $\mathrm{J}(X) \times_{\mathbf{P}^1} C$ qui ne dépendent pas de la deuxième coordonnée, on a bien que $t = t'$ et l'opération $t \mapsto \tilde{t}$ est bien injective.

□

Grâce au lemme précédent, on peut donc montrer le lemme suivant qui sera utile dans la preuve du théorème de densité d'Oguiso.

Lemme 4.2.9. *Soit $g : X \to \mathbf{P}^1$ une surface K3 elliptique dont on se donne un diviseur E étant une fibre irréductible de g. Si $|\mathrm{Aut}(X)| < \infty$ alors il existe $C_1, ..., C_n \subset X$ des courbes rationnelles lisse et des entiers $a_1, ..., a_n$ positifs tels que $[E] = \sum a_i[C_i]$.*

Démonstration. La fibration $g : X \to \mathbf{P}^1$ n'a pas forcément de section et donc on ne peut pas utilisé la formule de Shioda-Tate [Huy16, Coro 11.3.4].

Alors on considère la fibration jacobienne $\mathrm{J}(X) \to \mathbf{P}^1$ associée au pinceau elliptique $g : X \to \mathbf{P}^1$ qui a une section, pour plus de détail voir [Huy16, Section 11.4]. D'après [Huy16, Coro 11.4.7], on a $\rho(X) = \rho(\mathrm{J}X)$ et par conséquent la formule de Shioda-Tate [Huy16, Coro 11.3.4] donne que

$$\rho(X) = \rho(\mathrm{J}X) = 2 + \sum_{s \in \mathbf{P}^1} (r_s - 1) + \mathrm{rg}(\mathrm{MW})(\mathrm{J}X)$$

où r_s est le nombre de composante irréductible de la fibre $\mathrm{J}(X)_s$.

Maintenant si $\mathrm{rg}(\mathrm{MW}(\mathrm{J}X)) > 0$ alors on obtient une infinité de translation de $\mathrm{J}X$ par [Huy16, Rmq 15.4.5], donc d'après le lemme précédent 4.2.8, on a $|\mathrm{Aut}_s(X)| = \infty$. Par conséquent puisqu'on a supposé que $|\mathrm{Aut}(X)| < \infty$, on en déduit que $\mathrm{rg}(\mathrm{MW}(\mathrm{J}X)) = 0$.

La formule plus haut dit donc que

$$3 \geq \rho(X) = 2 + \sum_{s \in \mathbf{P}^1} (r_s - 1)$$

et ainsi, on a

$$1 \geq \sum_{s \in \mathbf{P}^1} (r_s - 1).$$

Par conséquent, il existe un $s \in \mathbf{P}^1$ tel que $r_s > 1$ c'est à dire que $\mathrm{J}(X)_s$ est non irréductible. Et donc par [Huy16, Coro 11.1.7], il existe $C_1, ..., C_n \subset X$ des courbes rationnelles lisses et des entiers $a_1, ..., a_n$ positifs tels que

$$[E] = \sum a_i [C_i].$$

□

Enfin on aura besoin d'un dernier lemme qui a pour but de traiter le second cas exhibé dans la preuve du théorème de densité d'Oguiso 4.2.11.

Lemme 4.2.10. *Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite de point de $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ convergeant vers $t_0 \in \Delta_{\mathrm{gen}}$ telles que $\rho(\mathcal{X}_{t_n}) \geq 3$ et avec $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_0})| < \infty$ alors il existe n tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_n})| = \infty$.*

Démonstration. La question porte sur l'existence d'un n tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_n})| = \infty$ par conséquent, on pourra au besoin remplacer Δ par un petit ouvert autour de t_0 et supposer quitte à prendre une sous-suite de (t_n) que tous les t_n sont dans cette ouvert.

Supposons par l'absurde qu'il n'existe aucun n tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_n})| = \infty$, alors par [Huy16, Coro 8.4.7], les surfaces $\mathcal{X}_{t_n}$ n'ont qu'un nombre fini de (-2)-courbes.

Si X est une surface K3 alors on notera G_X le graphe dont les sommets sont les (-2)-courbes de X et tel que pour deux sommets C, C' du graphe alors le nombre d'arrête entre C et C' est $C \cdot C'$. Dans ses articles [Nik83],[Nik85] et [Nik87], Nikulin a montré des résultats profonds concernant la finitude du nombre de classe d'isomorphisme des groupes de Picard des surfaces K3 et la finitude du nombre de graphe G_X associé aux surfaces K3 X. En vertu de ces résultats, et quitte à prendre un petit ouvert autour de t_0, on peut supposer que

1. le nombre de Picard $\rho(\mathcal{X}_{t_n}) =: \rho$ est constant indépendant de n.
2. le nombre de courbes rationelles de $\mathcal{X}_{t_n}$ est constant indépendant de n. Notons ces courbes $C_{n,1}, ..., C_{n,k}$ pour $n \geq N$.
3. Les nombres d'intersections $(C_{n,i} \cdot C_{n,j})$ sont indépendants de n.

Les théorèmes de classifications de Kovács 3.4.1, 3.4.4 suggère de distinguer les cas $\rho(\mathcal{X}_{t_0}) = 1$, $\rho(\mathcal{X}_{t_0}) = 2$ et $\rho(\mathcal{X}_{t_0}) \geq 3$.

Cas $\rho(\mathcal{X}_{t_0}) \geq 3$: D'après le corollaire [Huy16, Coro 8.4.7], le cône $\mathrm{NE}(\mathcal{X}_{t_0})$ est polyédral et il n'y a qu'un nombre fini de (-2)-courbes. Donc d'après 3.4.4, le cône $\mathrm{NE}(\mathcal{X}_{t_0})$ est engendré par des (-2)-courbes $D_1, ..., D_{k'}$. En particulier, la classe ample l s'écrit $l = \sum_{j=1}^{k'} a_j D_j$ pour des $a_j \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$.

Soit $j = 1, ..., k'$, pour tout $t \in \Delta$, on a $[D_j] \in \Lambda_{\mathrm{gen}} \subset \Lambda_t$ et notons $\delta_j := [D_j] \in \Lambda$. Puisque la classe $\delta_j \in \Lambda_t$ pour tout $t \in \Delta$, elle donne naissance à un diviseurs $\mathcal{D}_j$ plat sur la famille $\mathcal{X} \to \Delta$. De plus, puisque $(\mathcal{D}_j)_t^2 = \delta_j^2 = -2$ et que $(\mathcal{D}_j)_t \cdot l = \delta_j \cdot l > 0$, les $(\mathcal{D}_j)_t$ sont des diviseurs effectifs de carré -2 sur $\mathcal{X}_t$. Mais le morphisme $\mathcal{D}_j \to \Delta$ n'admet qu'un nombre fini de fibre singulière puisque Δ est de dimension 1 et donc quitte à échanger Δ avec un petit ouvert autour de t_0, on peut supposer que le morphisme $\mathcal{D}_j \to \Delta$ n'admet aucune fibre singulière. Par conséquent les fibres de $\mathcal{D}_j \to \Delta$ sont toutes des courbes lisses de carré -2 et donc ce sont des (-2)-courbes. Ainsi, le morphisme $\mathcal{D}_j \to \Delta$ est un $\mathbf{P}^1$-fibré sur Δ.

Pour $n \geq 1$, on a $(\mathcal{D}_j)_{t_n} \in \{C_{n,i} \mid i = 1, ..., k\}$ et donc en particulier puisque $l = \sum_{j=1}^{k'} a_j \delta_j$, la classe ample l est sommes coniques des $C_{n,1}, ..., C_{n,k}$. Ainsi, l'entier $k' \cdot \max_i\{a_i\} \cdot \max_{i,j}\{(C_{n,i} \cdot C_{n,j})\}$ est une bornes indépendantes de n de la suite $(l \cdot C_{n,i})_{n \geq 1}$. D'après le lemme 4.2.7, on a donc $\rho(\mathcal{X}_{t_0}) \geq \rho$. Or on a pris $t_0 \in \Delta_{\mathrm{gen}}$ et $t_n \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ donc $\rho = \rho(\mathcal{X}_{t_n}) > \rho(\mathcal{X}_{t_0})$. On a donc

une contradiction et il existe un n tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_n})| = \infty$.

Cas $\rho(\mathcal{X}_{t_0}) = 2$: Puisqu'on a $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_0})| < \infty$, le cône $\mathrm{NE}(\mathcal{X}_{t_0})$ est rationnellement polyédral par [Huy16, Coro 8.4.7]. Mais d'après la classification 3.4.1, il existe soit deux (-2)-courbes D_1, D_2 qui engendrent $\mathrm{NE}(\mathcal{X}_{t_0})$ soit il existe une fibration elliptique $\mathcal{X}_{t_0} \to \mathbf{P}^1$.

Dans le premier cas, on peut écrire $l = a_1 D_1 + a_2 D_2$ avec $a_1, a_2 \geq 0$. Et de même que précédemnt, les classes $[C_1], [C_2] \in \Lambda_{\mathrm{gen}} \subset \Lambda_t$ donnent naissance à deux $\mathbf{P}^1$-fibrés $\mathcal{D}_j \to \Delta$ où $j = 1, 2$. Ainsi, comme précédement, on peut écire l comme une somme conique des $C_{n,1}, ..., C_{n,k}$ et donc on peut borner la suite $(l \cdot C_{n,i})_{n \geq 1}$. Ainsi, on trouve d'après le lemme 4.2.7 que $\rho(\mathcal{X}_{t_0}) \geq \rho$. On a donc une contradiction et il existe un n tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_n})| = \infty$.

Dans le second cas où $\mathcal{X}_{t_0}$ admet une courbe elliptique $E \subset \mathcal{X}_{t_0}$. De façon similaire à précédement, on a $e := [E] \in \Lambda_{\mathrm{gen}} \subset \Lambda_t$ qui est primitif pour tout $t \in \Delta$. Et par conséquent E donne naissance à un diviseur $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ plat sur Δ. Et pour tout $t \in \Delta$, on a $\mathcal{E}_t \cdot l = e \cdot l > 0$ et donc $\mathcal{E}$ est une famille de diviseurs effectifs. Quitte à restreindre Δ, on peut supposer que $\mathcal{E}$ n'a aucune fibre singulière et que donc toutes les fibres sont des courbes de carré 0 lisse. Donc toutes les fibres $\mathcal{E}_t$ sont des courbes elliptiques. Pour $n \geq 1$, on a une courbe elliptique $\mathcal{E}_{t_n}$ sur $\mathcal{X}_{t_n}$ et comme $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_n})| < \infty$ alors d'après le lemme 4.2.9 on peut écrire $[\mathcal{E}_{t_n}] = \sum_{i=1}^{k} a_i [C_{n,i}]$ pour des entiers positifs a_i.

Mettons à profit la discussion précédente pour les deux possibilités suivantes données par la classification de Kovács 3.4.1 :

-Soit $l \in \tau_{t_0}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{t_0}))$ est somme conique de deux classes de courbes elliptiques $[E_1], [E_2]$ et la discussion précédente prouve donc que l'on peut écrire $[E_1] = \sum_{i=1}^{k} a_i^1 [C_{n,i}]$ et $[E_2] = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 [C_{n,i}]$ avec des entiers positifs a_i^1, a_i^2. Ainsi

$$l = b_1[E_1] + b_2[E_2] = \sum_{i=1}^{k} (b_1 a_i^1 + b_2 a_i^2)[C_{n,i}]$$

où $b_1, b_2 \geq 0$. Donc la suite $(l \cdot C_{i,n})_{n \geq 1}$ est bornée et le lemme 4.2.7 montre que $2 = \rho(\mathcal{X}_{t_0}) \geq \rho \geq 3$, ce qui est absurde.

-Soit $l \in \tau_{t_0}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{t_0}))$ est somme conique d'une classe de courbes elliptiques $[E]$ et d'une classe de (-2)-courbe $[C]$. Alors la discussion précédente prouve qu'on peut écrire $[E] = \sum_{i=1}^{k} a_i [C_{n,i}]$ avec des entiers positifs a_i. Comme précédement, on peut étendre $[C]$ en un $\mathbf{P}^1$-fibré $\mathcal{C}$ sur Δ de sorte que $[C_{t_n}] =$

$[C_{n,j}]$ pour un certain $j \in \{1, ..., k\}$. On peut donc écrire

$$l = b_1[E] + b_2[C] = b_1 \sum_{i=1}^{k} (a_i[C_{n,i}]) + b_2 C_{n,j}$$

où $b_1, b_2 \geq 0$. On voit de cette manière que la suite $(l \cdot C_{i,n})_{n\geq 1}$ est bornée et le lemme 4.2.7 montre que $2 = \rho(\mathcal{X}_{t_0}) \geq \rho \geq 3$, ce qui est absurde.

Après avoir vu que toutes ces possibilités sont impossibles, on en déduit qu'il existe nécessairement $n \geq 1$ tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_n})| = \infty$.

Cas $\rho(\mathcal{X}_{t_0}) = 1$ **:** On a $\Lambda_{\mathrm{gen}} = \tau_{t_0}(\mathrm{NS}(\mathcal{X}_{t_0})) = \mathbf{Z} \cdot l$.

On se donne une norme $||_||$ sur $\Lambda_{\mathbf{R}}$. S'il existe un $i = 1, ..., k$ tel que la suite $(||C_{n,i}||)_{n\geq 1}$ est bornée alors la suite $(l \cdot C_{n,i})_{n\geq 1}$ est aussi bornée. Donc en considérant le schémas de Hilbert, on trouverait un diviseur effectif D sur $\mathcal{X}_{t_0}$ tel que pour un n assez grand $[D] = [C_{n,i}]$. Par conséquent $D^2 = C_{n,i}^2 = -2$. Mais c'est absurde puisque $D \in \mathbf{Z} \cdot l$ qui n'a pas de classe de carré strictement négatif.

Donc pour tout $i = 1, ..., k$, la suite $(||C_{n,i}||)_{n\geq 1}$ est non bornée. Posons le vecteur de norme 1 suivant $x_{n,i} := \frac{C_{n,i}}{||C_{n,i}||}$. Quitte à extraire des sous suites, on peut supposer que $||C_{n,i}|| \to \infty$ et que $x_{n,i} \to x_{0,i}$. De plus, on a

$$x_{0,i}^2 = \lim_n x_{n,i}^2 = \lim_n \frac{-2}{||C_{n,i}||^2} = 0.$$

De même, puisque les nombres $(C_{n,i} \cdot C_{n,j})$ sont indépendant de n, on a

$$x_{0,i} \cdot x_{0,j} = \lim_n \lim_m x_{n,i} \cdot x_{m,j} = \lim_n \lim_m \frac{C_{n,i} \cdot C_{m,j}}{||C_{n,i}|| \cdot ||C_{m,j}||} = 0.$$

De plus, le faisceau $f_* \Omega_{\mathcal{X}/\Delta}$ est un fibré en droite sur Δ donc quitte à restreindre Δ a un petit ouvert autour de t_0, on peut supposer qu'il existe une section globale σ qui est non nulle. Autrement dit, on se donne une 2-forme holomorphe non nulle $\sigma_t \in H^{2,0}(\mathcal{X}_t)$ pour chaque t et tel que la fonction $t \mapsto [\sigma_t] \in \Lambda_{\mathbf{C}}$ est continue. Par conséquent, puisque les x_{t_n} sont des classes (1,1) de $\mathcal{X}_{t_n}$, on a $x_{t_n} \cdot \sigma_{t_n} = 0$ et ainsi on a

$$x_{0,i} \cdot \sigma_{t_0} = \lim_n x_{n,i} \cdot \sigma_{t_n} = 0.$$

On trouve donc que $x_{0,i} \in H^{1,1}(\mathcal{X}_{t_0}) \cap H^2(\mathcal{X}_{t_0}, \mathbf{R})$.

Rappelons que l'espace $H^{1,1}(\mathcal{X}_{t_0}) \cap H^2(\mathcal{X}_{t_0}, \mathbf{R})$ est un espace vectoriel réel muni d'une forme quadratique de signature (1,19) et qu'on note $\mathcal{C}_{X_{t_0}}$ la composante connexe contenant une forme de Kähler de l'ensemble des classes de carré positif. Ici la discussion précédente permet d'affirmer que $x_{0,i} \in \partial\mathcal{C}_{X_{t_0}}$ pour tout i. Mais donc $x_{0,i}^{\perp} \cap \overline{\mathcal{C}_{X_{t_0}}} = \mathbf{R}_{\geq 0} x_{0,i}$ or les $x_{0,i}$ sont orthogonaux entre eux et donc on pose $e := x_{0,1}$. Pour tout $i = 1, ..., k$, on a donc $x_{0,i} \in \mathbf{R} \cdot e$.

Mais donc les classes $x_{n,i}$ convergent toutes vers $\mathbf{R} \cdot e$. De plus, les cônes $\mathrm{NE}(\mathcal{X}_{t_n})$ sont engendrés pas les $x_{n,i}$ donc les $\mathrm{NE}(\mathcal{X}_{t_n})$ convergent vers $\mathbf{R} \cdot e$. Or $l \in \mathrm{NE}(\mathcal{X}_{t_n})$ donc $l \in \mathbf{R} \cdot e$. Ainsi on trouve que $l^2 = e^2 = 0$ mais c'est absurde puisque $l^2 > 0$. Il existe donc un n tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t_n})| = \infty$. □

Théorème 4.2.11. *Soit $f : \mathcal{X} \to \Delta$ une famille projective de surface K3. Alors l'ensemble $\mathcal{D}$ formé des éléments $t \in \Delta$ tels que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)| = \infty$ est dense dans Δ.*

Démonstration. S'il existe un $t \in \Delta_{\mathrm{gen}}$ tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)| = \infty$ alors pour tout autre $t' \in \Delta_{\mathrm{gen}}$, on a $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t'})| = \infty$. En effet, d'après 4.2.3 il existe un sous groupe $G_{\mathrm{gen}} < \mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)$ d'indice fini tel que pour tout $t' \in \Delta_{\mathrm{gen}}$, on a $G_{\mathrm{gen}} < \mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t'})$ et est d'indice fini. Mais alors G_{gen} est d'indice fini dans le groupe infini donc est infini $\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)$ et donc les groupes $\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_{t'})$ sont tous infinis puisqu'ils contiennent G_{gen} qui est infini. Ainsi, l'ensemble des fibres générales Δ_{gen} est inclus dans $\mathcal{D}$ mais $\Delta_{\mathrm{gen}} = \Delta \setminus \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ est dense par 4.1.4 donc $\mathcal{D}$ aussi.

On supposera donc à partir de maintenant que Δ_{gen} ne contient aucun t vérifiant $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)| = \infty$, il faudra donc chercher des fibres avec des groupes d'automorphismes infinis dans $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$.

Nous allons montrer l'assertion locale suivante :

***(A 4.2.12)** : Pour tout $t_0 \in \Delta_{\mathrm{gen}}$ et voisinage U de t_0, il existe un point $t \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta) \cap U$ tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)| = \infty$.*

Soit maintenant $t_0 \in \Delta_{\mathrm{gen}}$ et un voisinage U de ce point. Quitte à rétraicir Δ, on peut supposer que $\Delta = U$ et on cherche donc un point $t \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta) \cap U$ tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)| = \infty$. Notons $\rho_{\mathrm{gen}} := \rho(\mathcal{X}_{t_0})$.

Supposons qu'il n'existe pas de suite $t_n \to t_0$ où $t_n \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ et $\rho(\mathcal{X}_{t_n})) \geq 3$. Alors dans ce cas, il existe un voisinage U de t_0 tel que pour tout $t \in U \cap \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$, on a $\rho(\mathcal{X}_t) \geq 2$. Mais comme de plus $\Lambda_{\mathrm{gen}} \subsetneq \Lambda_t$ quand $t \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$, alors on a $\rho_{\mathrm{gen}} = 1$ et $\rho(\mathcal{X}_t) = 2$ pour tout $t \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta) = \Delta \setminus \Delta_{\mathrm{gen}}$.

On a donc deux cas possible :

1. $\rho_{\text{gen}} = 1$ et $\rho(\mathcal{X}_t) = 2$ pour tout $t \in \mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$.
2. Il existe une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ d'élément de $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ convergeant vers t_0 et telle que pour tout $n \geq 1$, on a $\rho(\mathcal{X}_{t_n}) \geq 3$.

Dans le premier cas, le lemme 4.2.6 dit qu'il existe un point t de $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)| = \infty$. Et dans le second cas, le lemme 4.2.10 montre l'existence d'un point t de $\mathrm{NL}(\mathcal{X}/\Delta)$ tel que $|\mathrm{Aut}(\mathcal{X}_t)| = \infty$. Ainsi, dans chaque cas on trouve une fibre avec un nombre infini d'automorphisme ce qui achève cette démonstration. □

Bibliographie

[Bar02] Alexander BARVINOK. *A course in convexity*. 2002. ISBN : 0-8218-2968-8.

[Bea] Arnaud BEAUVILLE. *Surfaces algébriques complexes*.

[Deb19] Olivier DEBARRE. *Surfaces K3*. 2019. URL : https://perso.imj-prg.fr/wp-content/uploads/debarre-pub/K3.pdf.

[DP] STEFAN KEBEKUS DANIEL GREB et THOMAS PETERNELL. « ETALE FUNDAMENTAL GROUPS OF KAWAMATA LOG TERMINAL SPACES, FLAT SHEAVES, AND QUOTIENTS OF ABELIAN VARIETIES ». In : (). URL : https://arxiv.org/pdf/1307.5718.pdf.

[DP04] J.-P. DEMAILLY et M. PAUN. « Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold ». In : *Annals of Mathematics* 159.2 (2004).

[Fre82] Michael FREEMAN. « The topology of four-dimensional manifolds. » In : *J. Differential Geometry* 17.03 (1982), p. 357-453.

[Har77] Robin HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. Springer New York, NY, 1977. ISBN : 978-0-387-90244-9.

[Huy04] Daniel HUYBRECHTS. *Complex geometry : An introduction*. Springer Berlin, Heidelberg, 2004. DOI : 978-3-540-21290-4.

[Huy16] Daniel HUYBRECHTS. *Lecture on K3 surfaces*. Cambridge University Press, 2016. ISBN : 9781316594193.

[Kol95] János KOLLÁR. *Rational Curves on Algebraic Varieties*. Springer Berlin, Heidelberg, 1995. ISBN : 978-3-540-60168-5.

[Kov94] S. KOVÁCS. « The cone of curves of a K3 surface ». In : *Mathematische Annalen* 300.4 (1994), p. 681-691.

[Nik80] V. V. NIKULIN. « Integral symmetric bilinear forms and some of their geometric appli cations ». In : *Math. USSR Izv.* 14 (1980), p. 103-167.

[Nik83] V. V. NIKULIN. « On the quotient groups of the automorphism groups of hyperbolic forms by the subgroups generated by the 2-reflections ». In : *J. SovietMath.* 22 (1983), p. 1401-1476.

[Nik85] V. V. NIKULIN. « Surfaces of type K3 with finite automorphism groups and a Picard group of rank three ». In : *Steklov Institute Math.* 3 (1985), p. 131-155.

[Nik87] V. V. NIKULIN. « Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic sur faces : in Proceedings of the International Congress of Mathematics ». In : *Amer. Math. Soc.* (1987), p. 654-671.

[Ogu03] K. OGUISO. « Local families of K3 surfaces and applications ». In : *Journal of Algebraic Geometry* 12.3 (2003), p. 405-433.

[Roc70] R.Tyrell ROCKAFELLAR. *Convex analysis*. Princeton University Press, 1970.

[Sai74] B. SAINT-DONAT. « Projective Models of K3 Surfaces ». In : *American Journal of Mathematics* 96.4 (1974), p. 602-639.

[Sam67] Pierre SAMUEL. *Théorie algébrique des nombres*. Sous la dir. de collection Méthodes HERMANN. 1967. ISBN : 2-7056-5589-1.

[seminK3] *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes (Palaiseau, 1981/1982)*. T. Astérisque 126. Lecture Notes in Mathematics. Paris : Société Mathématique de France, 1985.

[Ser77] Jean-Pierre SERRE. *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, 1977.

[Siu83] Y.-T. SIU. « Every K3 surface is Kähler ». In : *Invent Math* 73 (1983), p. 139-150. DOI : https://doi.org/10.1007/BF01393829.

[Ste85] Hans STERK. « Finiteness results for algebraic K3 surfaces ». In : *Mathematische Zeitschrift* 189 (1985), p. 507-513.

[Str] Benoit STROH. *Surfaces de Riemann*. URL : https://webusers.imj-prg.fr/~benoit.stroh/Poly_Riemann.pdf.

[Ven84] W. Barth K. Hulek Chris Peters A.van de VEN. *Compact complex surfaces*. Springer, 1984. ISBN : 978-3-642-96756-6.

[Voi02] Claire VOISIN. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Société mathématique de France, 2002. ISBN : 2-85629-129-5.

[Wei] André WEIL. « Scientific works. Collected papers. Vol. II (1951–1964). » In : *Springer-Verlag* ().

[Zie94] Günter M. ZIEGLER. *Lectures on Polytopes*. Springer New York, NY, 1994. ISBN : 978-0-387-94329-9.