

Exercices : Homographies et birapport

Exercice 1. Soit k un corps.

a) Soient a, b, c, d, e cinq points distincts d'une droite projective $\mathbb{P}^1(k)$. Montrer l'égalité

$$[a, b, c, d][a, b, d, e][a, b, e, c] = 1.$$

b) Déterminer les homographies de la droite projective $\mathbb{P}^1(k)$ qui échangent 0 et ∞ et fixent 1. En déduire, sans calcul, que pour quatre points distincts a, b, c, d on a

$$[b, a, c, d] = [a, b, c, d]^{-1}.$$

Montrer de manière analogue : $[a, b, d, c] = [a, b, c, d]^{-1}$ et $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$.

Exercice 2. Soit k un corps et soit $\varphi : \mathbb{P}^1(k) \rightarrow \mathbb{P}^1(k)$ une application injective qui préserve le birapport.

a) Supposons en plus que $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1, \varphi(\infty) = \infty$. Montrer que

$$\varphi(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{P}^1(k).$$

b) Montrer que φ est une homographie.

Exercice 3.

a) Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan complexe situés sur une même droite affine réelle D . Montrer que le birapport de a, b, c, d vus comme points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ coïncide avec le birapport de a, b, c, d vus comme points de la complétion projective de D . En déduire que $[a, b, c, d]$ est un nombre réel.

b) Plus généralement, montrer que quatre points distincts du plan complexe sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est un nombre réel.

Exercice 4. Soit q un nombre premier et $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments.

a) En utilisant l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$, construire un morphisme de groupes injectif

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{q+1}.$$

b) Montrer que c'est un isomorphisme si $q = 2$ ou $q = 3$. Indication : utiliser (et prouver) que $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{F}_q)$ a

$$\frac{\prod_{j=0}^{n-1} (q^n - q^j)}{q - 1}$$

éléments.

Exercice 5. Soient H et H' deux hyperplans d'un espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$ et soit m un point de $\mathbb{P}^n(k)$ situé ni sur H ni sur H' .

a) Pour tout point $x \in H$, montrer que l'intersection de la droite mx et de H' est un unique point $f(x)$.

b) Montrer que l'application $f : H \rightarrow H'$ ainsi définie est une homographie : on dit que f est la perspective (ou projection centrale) de centre m de H sur H' .

Exercice 6. Soient D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites du plan projectif $\mathbb{P}^2(k)$ passant par un même point O . Soit également Δ une droite dans $\mathbb{P}^2(k)$ ne passant pas par O . Pour $i = 1, \dots, 4$ soit m_i l'unique point d'intersection $D_i \cap \Delta$. Puisque $\Delta \simeq \mathbb{P}^1(k)$ le birapport $[m_1, m_2, m_3, m_4]$ est défini.

a) Montrer que $[m_1, m_2, m_3, m_4]$ ne dépend pas de la droite Δ , mais seulement de D_1, D_2, D_3, D_4 : c'est par définition le birapport $[D_1, D_2, D_3, D_4]$ des droites D_1, D_2, D_3, D_4 .

b) Montrer que $[D_1, D_2, D_3, D_4] = -1$ si et seulement si une droite parallèle à D_4 rencontre D_1, D_2, D_3 en des points A_1, A_2, A_3 tels que A_3 soit le milieu du segment $[A_1 A_2]$.